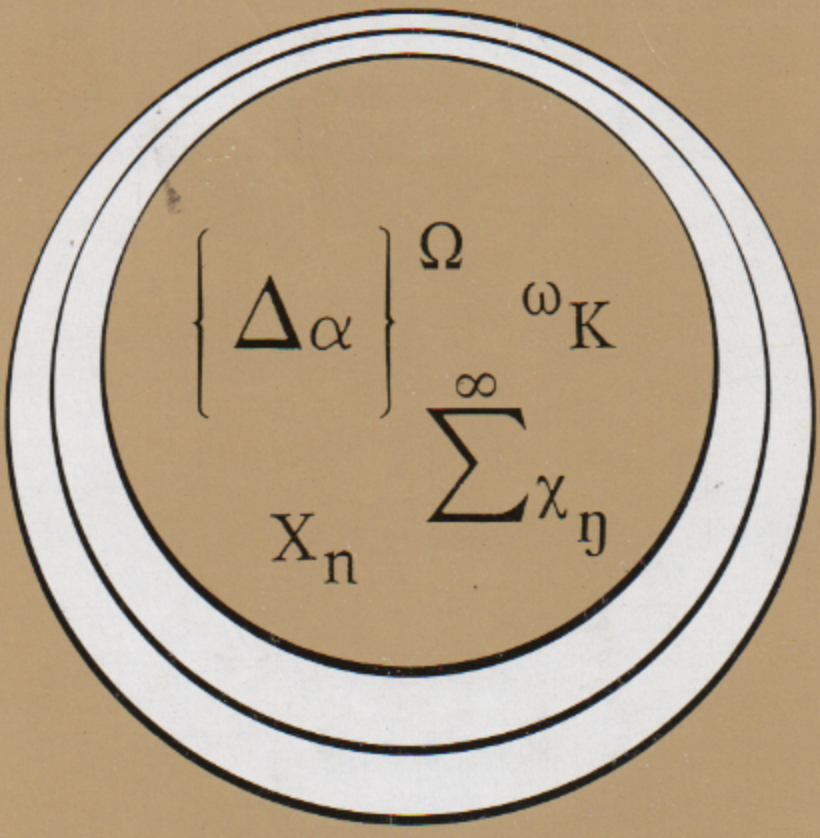
TEORÍA DE CLASES Y CONJUNTOS

UNA INTRODUCCIÓN DEL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES

MARIO DE J. PÉREZ-JIMÉNEZ



EDUNSA Ediciones y Distribuciones Universitarias s.a.

TEORIA DE CLASES Y CONJUNTOS

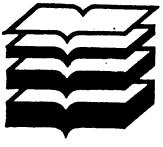
(UNA INTRODUCCION DEL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES)

MARIO DE J. PEREZ-JIMENEZ

Profesor de la Facultad de
Matemáticas de la Universidad
Central de Barcelona y
Catedrático de Matemáticas
de I.B.

Prólogo: PABLO BOBILLO GUERRERO

Catedrático Numerario de la
Facultad de Ciencias de la
Universidad de Granada y
miembro de la Real Academia
de Ciencias de Granada



EDUNSA
EDICIONES Y DISTRIBUCIONES UNIVERSITARIAS, S.A.
Viladomat, 247-249
08029 Barcelona

© 1988 Mario de J. Pérez-Jiménez
© 1988 Edita:
EDUNSA
Ediciones y Distribuciones Universitarias, S.A.
Viladomat, 247-249 08029 Barcelona
I.S.B.N. : 84-7747-000-6
D.L. : 3.340-88
Imprime: GRAPHIC-2, S.A.
Lope de Vega, 18 08005 Barcelona

A mis padres,

como sencilla muestra

de mi infinita gratitud.

PRÓLOGO

Es un lugar común entre los matemáticos que, para justificar los planteamientos iniciales de la Matemática, para rigorizarlos, y por supuesto para comprenderlo, hay que tener bastantes conocimientos no elementales.

Con más precisión, para establecer una rigurosa exposición ordenada de los temas matemáticos, debe empezarse por una construcción de la teoría de conjuntos. Cualquiera que haya estudiado matemáticas, incluso a un nivel no muy elevado, sabe que muchos conceptos de la teoría de conjuntos sólo son plenamente asimilados bastante tiempo despues de haberse acostumbrado a emplearlos en estudios sucesivos.

Este hecho, fácilmente captado por quién estudia, responde a una necesidad obligada en la construcción de la Matemática. Necesidad que proviene de la utilización de la Lógica, que tiene sus exigencias. La elaboración de una Lógica rigurosa, aunque sea con fines exclusivamente utilitarios para el matemático, requiere la construcción inicial de un lenguaje adecuado: lo que se llama un lenguaje lógico. Pues como es sabido, muchas paradojas proviene de la anfibología o de la ambivalencia de los términos de lenguaje empleados, que inicialmente es el lenguaje ordinario.

Ahora bien, para construir un lenguaje lógico es preciso emplear el conjunto de los números naturales. Hay que decir que han existido intentos de evitar una previa construcción de $\mathbf{N}$*, pero el sutil peligro de confundir lo que en gramática clásica se llamaban número abstracto y número concreto; y la introducción de una especie de inducción infinita, no resisten a una crítica rigurosa.*

Podría parecer en principio que no hay solución sin trampa tácita. Y, sin embargo, el camino seguido es correcto, e incluso obligado: se parte del lenguaje ordinario, con símbolos adicionales, y sobretodo con un cauteloso cuidado en cuanto a la extensión de los términos que se emplean. Se parte, usando un neologismo ya usual, de un metalenguaje. En ese metalenguaje se expresan unas reglas elementales, imprescindibles para razonar: se construye una metalógica. Y con esa metalógica, y empleando ese metalenguaje, se construye una teoría de conjuntos: la llamada teoría de conjuntos elemental. De este modo, se llega a tener una construcción del conjunto de los números naturales que permita hablar de sucesión, de n-pla y de recurrencia, en un sentido ya no intuitivo ni, sobre todo, impreciso.

A partir de este estadio, empieza la división seria de opiniones. Para unos matemáticos, el verdadero rigor empieza aquí; es un tanto difícil de entender cómo se puede rigorizar con unos cimientos no rigurosos. Para ellos, el siguiente escalón es la construcción de un lenguaje lógico; de una Lógica elaborada en tal lenguaje; y de una teoría rigurosa de conjuntos, llamada teoría lógica de conjuntos. Tras ello, vendrían las Matemáticas "de verdad".

Se pueden objetar muchas cosas a ese planteamiento, y no sólo desde un punto de vista pragmático. De hecho, a partir de la teoría elemental de conjuntos (o de clase, o de categorías, o de flechas) se pueden elaborar las Matemáticas: es el punto de vista que podríamos llamar hilbertiano.

Pero es quizá, para el matemático al menos, otro aspecto el que choca: para esos matemáticos "purísimos", los objetos matemáticos <u>son</u> combinaciones de símbolos. Y como decía un ilustre matemático español, si cuatro símbolos son un cierto objeto matemático en una página de un libro, al dar la vuelta la página no vuelven a aparecer los mismos cuatro símbolos por más que el autor diga que sí: basta coger una buena lupa para comprobarlo. Es decir, por pretensiones de rigor, se cae en groseras faltas desde un punto de vista filosófico.

El libro que prologamos se ocupa en principio de la construcción de una teoría de conjuntos elemental, la teoría de clases, con la previa presentación de una metalógica, expresado en un adecuado metalenguaje. Y continúa con una exposición matemática -es decir, habitual, no purista- de los primeros y fundamentales capítulos del Análisis, con extensión y profundidad inusuales.

Creemos que el alumno universitario interesado por la Matemática agradecerá la exposición, en castellano, de una serie de temas metodológicamente ordenados, que aún cuando tarde tiempo en aprehenderlos tranquilizarán su inquietud en fundamentar muchos puntos iniciales de las Matemáticas. En términos estudiantiles, se oye más de una y de dos veces que querría saberse "qué son de verdad y en el fondo los conjuntos".

Pero también para el profesor universitario, que debe conocer a fondo la materia que explica a sus alumnos, el libro del profesor Pérez-Jiménez ha de ser de gran utilidad, al brindarle una síntesis de muchos temas, desperdigados en muchos más textos. Tal vez sea ése el comentario-resumen que nos atreveríamos a hacer del libro; una síntesis que era de esperar... y de agradecer.

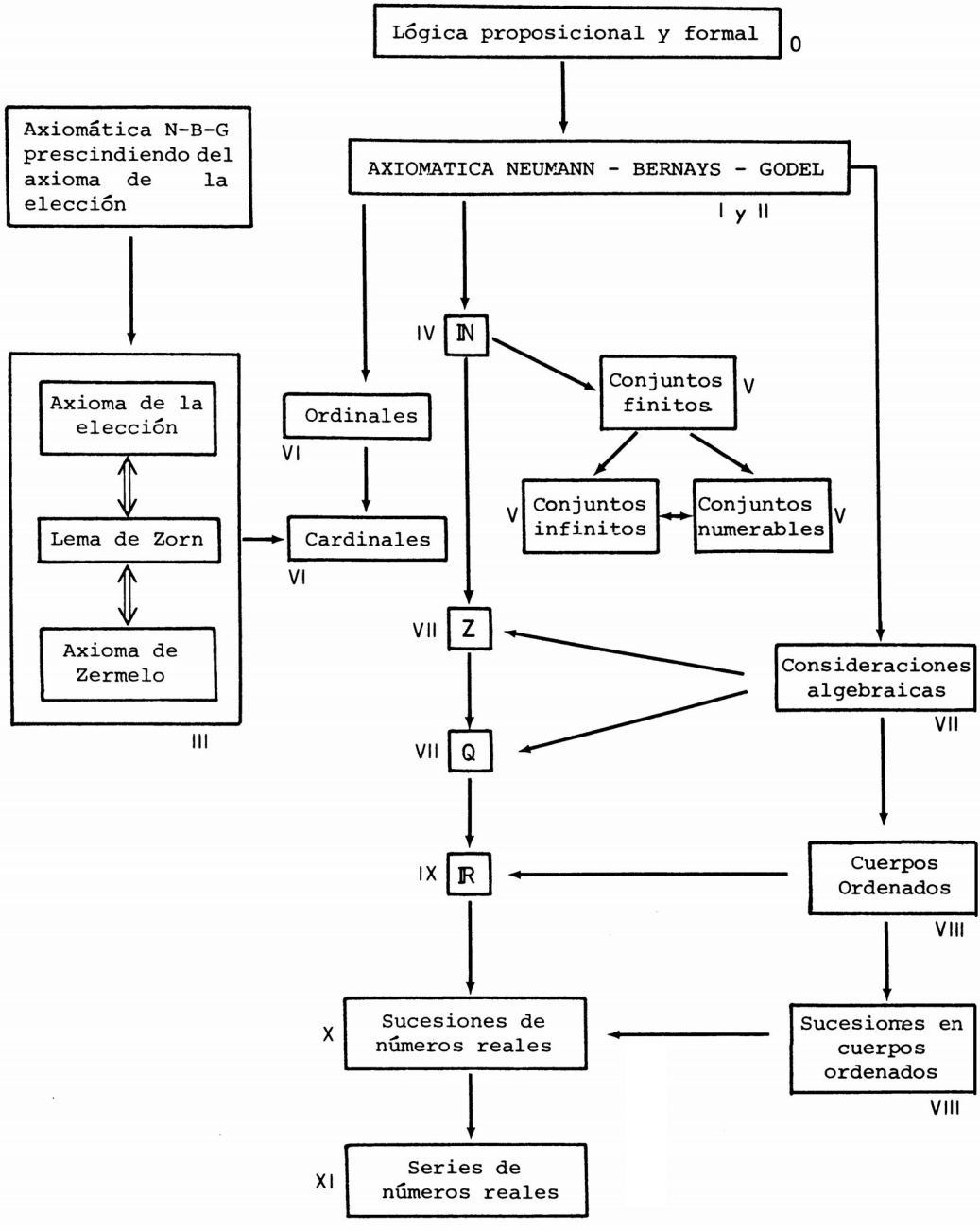
Pablo Bobillo
de la Real Academia de Ciencias de Granada

INTRODUCCIÓN

Tras haber desarrollado durante los cinco últimos cursos la asignatura de Análisis Matemático I en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Central de Barcelona, he podido comprobar la existencia de una bibliografía muy diversa y dispersa relativa a la teoría de clases y conjuntos, objeto de la primera parte del temario de dicha asignatura; resultando que, en las cuestiones de fundamentación, los textos que tratan el tema con un cierto rigor matemático utilizan, por lo general, un lenguaje excesivamente complejo para quien acaba de llegar a la Universidad.

Todo ello me indujo a desarrollar una labor de síntesis y recopilación que, con la aportación de determinadas cuestiones originales, culminaron en el presente libro; uno de cuyos objetivos principales consiste en llenar el vacío bibliográfico existente para el que inicia sus primeros pasos "serios" en ese fascinante, y por qué no decirlo, controvertido mundo de las Matemáticas.

A partir de unos conceptos elementales de Lógica proposicional y formal, con fines exclusivamente "utilitarios", se elaboran con minuciosidad cada uno de los eslabones que nos conducirán a la introducción del cuerpo de los números reales, base del Análisis Real; así como algunas cuestiones que directa (consideraciones algebraicas, cuerpos ordenados) o indirectamente (ordinales, cardinales) inciden en su estudio, y que podríamos sintetizar en el siguiente esquema:


Lógica proposicional y formal
0
Axiomática N-B-G prescindiendo del axioma de la elección
AXIOMATICA NEUMANN - BERNAYS - GODEL
I y II
IV ℕ
Conjuntos finitos
V
Ordinales
VI
V Conjuntos infinitos
Conjuntos numerables
V
Axioma de la elección
Lema de Zorn
Axioma de Zermelo
III
Cardinales
VI
VII Z
Consideraciones algebraicas
VII
VII Q
IX ℝ
Cuerpos Ordenados
VIII
X Sucesiones de números reales
Sucesiones en cuerpos ordenados
VIII
XI Series de números reales

Se observará que en los distintos parágrafos aparecen términos como "proposiciones", "lemas", "teoremas" y "corolarios" para designar a teoremas de la teoría Von Neumann-Bernays-Gödel (N-B-G). ¿Cuál ha sido el criterio seguido para doptar un nombre u otro a un determinado teorema?. Pues, sencillamente, algo tan subjetivo como el criterio personal del autor a fin de discernir un teorema "menos importante" ("proposición") de otro que "lo es más" ("teorema"), reservando el término "lema" para designar ciertos pasos que se realizan en una demostración (bien de una "proposición" o de un "teorema") y que por alguna razón (normalmente para poder esquematizar con claridad y brevedad tal demostración) es conveniente resaltar; finalmente, el término "corolario" se reserva para designar teoremas que son consecuencias inmediatas de otros previamente establecidos. En definitiva, pues, la utilización de los términos "proposición", "lema", "teorema" y "corolario" ha de considerarse en el presente libro como algo bastante aleatorio.

Al final de cada capítulo aparecen problemas enunciados (más de trescientos), la mayoría de los cuales están ilustrados con indicaciones muy expresivas, que debe representar una buena piedra de toque para el lector a fin de obtener una referencia en torno al grado de asimilación de la teoría ya elaborada.

El presente libro va dirigido, fundamentalmente a estudiantes de Matemáticas, si bien con oportunos y simples recortes puede ser adaptado para estudiantes de Físicas, Químicas, Económicas y, en fín, para todas aquellas Licenciaturas en las cuales jueguen un importante papel la teoría de sucesiones y series de números reales.

La teoría de clases y conjuntos desarrollada es debida a Von Neumann, Bernays y Gödel (axiomática N-B-G), que posee muchas e importantes analogías con la teoría de conjuntos más habitualmente considerada debida a Zermelo y Fraenkel (axiomática Z-F). En ésta los conceptos primitivos son "conjunto" y "pertenencia", mientras que en la teoría N-B-G lo son "clase" y "pertenencia", siendo el

concepto de "conjunto" definido a partir de éstos (es una clase que pertenece a alguna clase).

Uno de los principios que subyacen en la teoría original, que podríamos llamar intuitiva, de conjuntos de Cantor es el relativo a asociar a cada predicado universal o "propiedad" un ente cuyos elementos sean los objetos de la teoría que verifican dicha propiedad. La teoría N-B-G con el concepto primitivo de clase responde a dicha necesidad, como no ocurre en la teoría Z-F en la cual ha de distinguirse entre predicados universales (colectivizantes) que determinan conjuntos (conjuntos "bien definidos") y los que no (predicados universales no colectivizantes, que dieron lugar a los conjuntos denominados clásicamente "paradójicos").

Por todo ello, parece mucho más natural y pedagógico, aunque no por ello menos abstracto, presentar de entrada al alumno en una axiomática rigurosa la dicotomía clase-conjunto (teoría N-B-G) en lugar de la dicotomía conjuntos bien definidos-conjuntos paradójicos (teoría Z-F). El profesor Dr. Pablo Bobillo sería el primer impulsor de tal idea en la Universidad Central de Barcelona, introduciéndola en el programa de Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas.

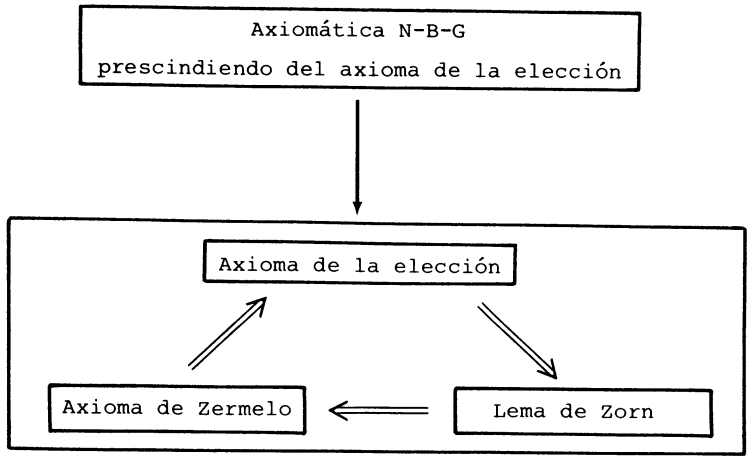
Los axiomas de la teoría N-B-G de clases y conjuntos se introducen en los capítulos I y II, a excepción del axioma del infinito que en el capítulo IV permite a su vez introducir el conjunto de los números naturales; posteriormente se estudian las correspondencias y aplicaciones entre conjuntos así como las relaciones (de equivalencia y de orden) en una clase. El parágrafo destinado a retracciones y secciones proporciona sugestivas caracterizaciones de la inyectividad y epiyectividad de una aplicación.

Para los estudiantes interesados en analizar con profundidad las interferencias existentes entre las axiomáticas más importante de la teoría de clases y conjuntos, es recomendable el libro "Sets and classes" G.H. Müller (Bibliografia [24]).

Una de las cuestiones más interesantes que, pienso, aborda el presente texto es la relativa al teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (en cuya redacción definitiva debo agradecer la aportación del profesor Dr. Manuel Tort) y sus aplicaciones. En esencia, consiste en rigorizar y formalizar todos aquellos procesos recurrentes cuya construcción responde a la ley intuitiva del "y así sucesivamente...", y cuyo exponente más significativo es el de la construcción de una determinada sucesión por medio de una "ley de recurrencia" que proporciona el término n-ésimo de la sucesión en función de los anteriores y en la que se explicitan algunos de los primeros términos (según la estructura de la ley de recurrencia). El teorema anteriormente citado permite demostrar la existencia y unicidad de una tal sucesión.

La mayoría de demostraciones relativas a cuestiones basadas en dicho teorema son originales; tales demostraciones (en especial la del teorema de reordenación de Riemann) son, por lo general, algo más complicadas que las "tradicionales" en las cuales se comete un abuso de lenguaje; siendo muy importante resaltar la idea que conllevan las correspondientes funciones de recurrencia y que permite traducir, sin dificultades, tales demostraciones a las "tradicionales".

Sin duda, el axioma de la teoría N-B-G que más polémicas, discusiones y controversias ha provocado es el axioma de la elección. En todo el capítulo III se prescinde de dicho axioma en la teoría, obteniéndose las dos proposiciones más usuales (lema de Zorn y axioma de Zermelo) que son lógicamente equivalentes al axioma de la elección. Las demostraciones de tales equivalencias son analizadas y justificadas con todo detalle, de acuerdo con el siguiente esquema



En la proposición 2 y en el problema 1 de dicho capítulo pueden obtenerse nuevas proposiciones lógicamente equivalentes al axioma de la elección.

Con todos los respetos para Kronecker ("Dios creó los números naturales, el resto es obra de los hombres") que consideraba a los números naturales como entes preexistentes, el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es introducido en la teoría N-B-G a partir del axioma del infinito en el capítulo IV, perdiendo de esta manera toda su "divinidad".

El teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita permite demostrar la existencia y unicidad de la suma y producto de números naturales; y, posteriormente, la existencia salvo orden isomorfismos de un único conjunto de Peano-Hilbert: $\mathbb{N}$. De esta forma, el modelo de $\mathbb{N}$ obtenido de la teoría N-B-G coincide salvo orden isomorfismos con el modelo de $\mathbb{N}$ deducido de los axiomas de Peano-Hilbert.

En el capítulo V se estudian los conjuntos finitos, infinitos

(según Dedekind) y numerables; con la obtención de numerosas propiedades y caracterizaciones, siendo originales algunas de las relativas a conjuntos no finitos.

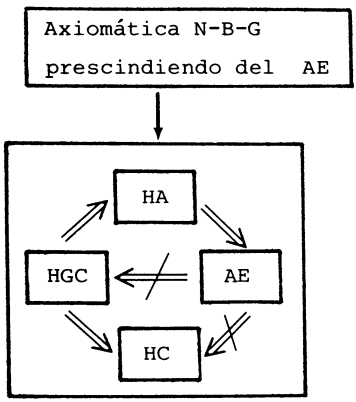
En el capítulo VI se desarrollan las primeras cuestiones relativas a la teoría de ordinales y cardinales. El concepto de ordinal es introducido con independencia de la teoría de conjuntos ordenados, si bien uno de los teoremas centrales de la teoría permite asociar a cada conjunto bien ordenado un único número ordinal orden isomorfo a él (el número ordinal de dicho conjunto bien ordenado), de tal manera que dos conjuntos bien ordenados son orden isomorfos sí y sólo sí poseen el mismo número ordinal. Se elaboran posteriormente los primeros eslabones de una Aritmética Ordinal cuyo objetivo se reduce, prácticamente, a la introducción de la suma y producto de números ordinales; para estudios posteriores es aconsejable el libro "Introduction to axiomatic set theory". Takeuti-Zaring (Bibliografía [29]).

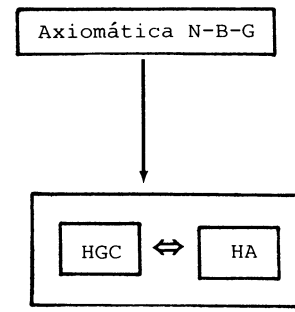
El concepto de cardinal de un conjunto A se introduce como el elemento mínimo de la clase O_A cuyos elementos son los ordinales α para los que existe una buena ordenación $\leq_1$ en A, de manera que $(A,\leq_1)$ es orden isomorfo a $(\alpha,\leq)$. Tal definición exige el axioma de la elección a fín de que, para cada conjunto A, la clase O_A sea no vacía. Resulta entonces que los cardinales son conjuntos (lo cual no puede asegurarse si se introducen como clases de conjuntos equipotentes) y que, dos conjuntos son equipotentes sí y sólo sí poseen el mismo cardinal. Una de las cuestiones más sugestivas que se abordan en el presente capítulo es la encaminada a probar que sobre los conjuntos finitos el concepto de cardinal coincide con el concepto de número de elementos del conjunto.

Mientras que la clase θ, cuyos elementos son los ordinales, es un ordinal (más aún, es el único ordinal que <u>no</u> es conjunto, lo que resolverá la paradoja de Burali-Forti), la clase Ω cuyos

elementos son los cardinales no es un conjunto y, por tanto, no será un cardinal.

En el último parágrafo del capítulo VI se introducen unos cardinales de singular importancia: los "aleph", exponiéndose la hipótesis generalizada del contínuo (HGC), la hipótesis del contínuo (HC) y la de los "aleph" (HA), así como las conexiones existentes entre ellas y el axioma de la elección (AE), resumidas en el siguiente esquema:





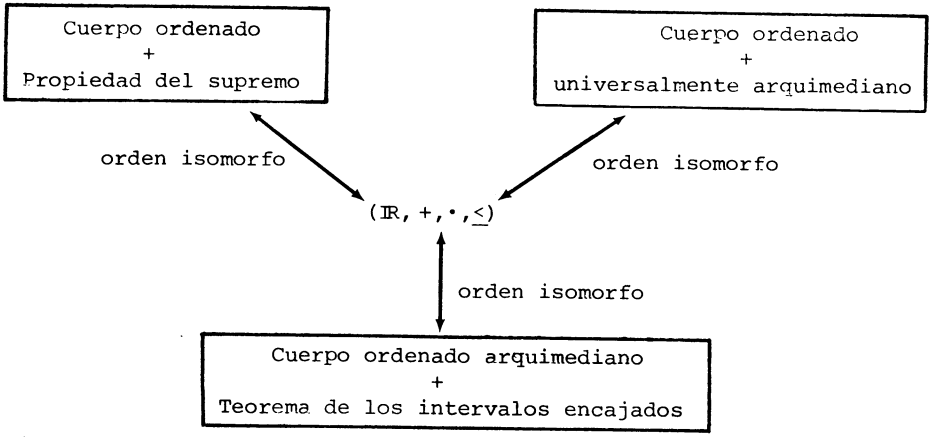
Uno de los muchos objetivos trazados en el esquema mental del texto ha sido el de formar un bloque compacto, en el sentido de que pudiera estudiarse de la primer a la última página sin necesidad de recurrir, ineludiblemente, a otros textos que proporcionasen definiciones o resultados imprescindibles para el desarrollo de algunas cuestiones. Esta idea fué la que motivó el parágrafo 1 del capítulo VII (capítulo destinado a introducir el anillo de los números enteros y el cuerpo de los números racionales) cuyo título sintetiza su contenido: "Breves consideraciones algebraicas"; y en el que se exponen los conceptos y resultados indispensables, eludiéndose las demostraciones (que pueden encontrarse en cualquier tratado de álgebra elemental).

Tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$ son introducidos como casos particulares de cuestiones algebraicas de carácter general, las cuales abordamos con todo detalle: tanto el proceso de obtención del grupo de cocientes de un semigrupo unitario y conmutativo en el que cada elemento es regular, como el de obtención del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad.

El capítulo VIII está destinado al estudio de los cuerpos ordenados y cuyo objetivo fundamental es la completación de un cuerpo ordenado que, en el caso particular de ser éste arquimediano, nos proporciona un modelo orden isomorfo al cuerpo de los números reales.

Se puede simplificar la introducción del cuerpo de los números reales, traduciendo literalmente el proceso de completación al caso particular del cuerpo de los números racionales (¡que sólo admite una ordenación, la usual, que lo dota de estructura de cuerpo ordenado!), con la salvedad del teorema de completitud que se abrevia notoriamente debido al hecho de ser arquimediano el cuerpo de los números racionales.

En el capítulo IX se obtienen atractivas caracterizaciones, salvo orden isomorfismos, del cuerpo de los números reales y que podemos esquematizar así:



En el capítulo X se analizan las peculiaridades más importantes de las sucesiones de números reales (abordadas con carácter general en el parágrafo 3 del capítulo VIII relativo a "Sucesiones en un cuerpo ordenado"), resultantes de la validez en $\mathbb{R}$ de la propiedad del supremo y del teorema de los intervalos encajados; introduciéndose y analizándose conceptos específicos de estas sucesiones (límite superior e inferior).

La ampliación del conjunto $\mathbb{R}$ a $\bar{\mathbb{R}}$ permite considerar las sucesiones divergentes de números reales, cuyas propiedades justificarán a posteriori las operaciones formales consideradas con elementos de $\bar{\mathbb{R}}$ y se extienden a $\bar{\mathbb{R}}$ los conceptos de límite superior e inferior de una sucesión de números reales.

El último capítulo del libro está dedicado al estudio de las series de números reales, abordando tanto las cuestiones de tipo algebraico (parágrafo 1) como las puramente analista (restantes parágrafos). Hemos de resaltar el hecho de que para la introducción de la serie armónica generalizada (básica, a su vez, para el análisis de las series de términos positivos) se necesita la función exponencial de variable real, cuya introducción no es objetivo del presente texto en el que no se desarrolla una teoría de funciones reales; no obstante, para cada $a \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$ admitimos, sin más, la existencia de una función exponencial de variable real y base a verificando las propiedades usuales que generaliza a las de la función exponencial de base y exponente natural.

El análisis del carácter de una serie - de términos positivos (§3), alternada (§4) o de términos arbitrarios (§5)- y de su incidencia en las operaciones algebraicas definidas en el parágrafo 1, es el objetivo fundamental de la teoría, centrando el estudio en la obtención de condiciones necesarias, suficientes o caracterizaciones para la convergencia simple, absoluta o condicional de una serie de números reales.

Deseo expresar mi profunda gratitud al profesor Dr. Pablo Bobillo y a los profesores Albert Compta, Antonio Pérez, J. Alberto Pueyo y Pablo Taniguchi que con la revisión global del texto, con sus sugerencias y contínuo estímulo han contribuido decisivamente a hacer una realidad el presente libro.

Finalmente, quiero hacer constar mi reconocimiento a Queta, mi querida esposa, que con tanta abnegación, sacrificio, comprensión y cariño ha suplido mi contínua ausencia real, que no física, de nuestro hogar.

Barcelona, Septiembre 1987

Mario de J. Pérez-Jiménez

I N D I C E G E N E R A L

Prólogo I
Introducción V
Indice General XVII

Capítulo 0: Cálculo de proposiciones 1

Capítulo I: Axiomática de la teoría de clases.
§ 1 : Primeros axiomas de la teoría de clases . . . 17
§ 2 : Producto cartesiano de clases. Gráficas . . . 30
§ 3 : Correspondencias y aplicaciones entre conjuntos 41
§ 4 : Retracciones y secciones 53
§ 5 : Famílias y sistemas de conjuntos 63

Capítulo II: Relaciones de equivalencia y de orden.
§ 1 : Relaciones de equivalencia en una clase . . . 89
§ 2 : Relaciones de orden 101
§ 3 : Conjuntos ordenados densos y contínuos . . . 125
§ 4 : Clases bien ordenadas 131
§ 5 : Conjuntos bien ordenados 140

Capítulo III: Equivalencias del axioma de la elección: el lema de Zorn y el axioma de Zermelo . . . 162

Capítulo IV: Existencia de conjuntos: el conjunto de los números naturales.
§ 1 : Introducción del conjunto de los números naturales 179
§ 2 : Ordenación usual de $\mathbb{N}$ 184
§ 3 : Suma y producto de números naturales 189
§ 4 : Conjuntos de Peano-Hilbert 208

Capítulo V: Conjuntos finitos, infinitos y numerables.
§ 1 : Conjuntos finitos 216
§ 2 : Conjuntos infinitos, según Dedekind 235
§ 3 : Conjuntos numerables 243

Capítulo VI: Una introducción a la teoría de ordinales y cardinales.
§ 1 : Concepto de ordinal. Primeras propiedades . . . 259
§ 2 : Número ordinal de un conjunto bien ordenado . . 271
§ 3 : Introducción de la suma y producto de números ordinales 273
§ 4 : Cardinal de un conjunto 280
§ 5 : La clase Ω de los números cardinales 284
§ 6 : La hipótesis generalizada del contínuo. La hipótesis del contínuo. La hipótesis de los "aleph" 290

Capítulo VII: El conjunto $\mathbb{Z}$ y el conjunto Q.
§ 1 : Breves consideraciones algebraicas 302
§ 2 : El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros 321
§ 3 : El cuerpo Q de los números racionales 335

Capítulo VIII: Cuerpos ordenados.
§ 1 : Cuerpos ordenados 349
§ 2 : Cuerpos ordenados arquimedianos 360
§ 3 : Sucesiones en un cuerpo ordenado 367
§ 4 : Completación de un cuerpo ordenado 383

Capítulo IX : El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales 404

Capítulo X : Sucesiones de números reales.
§1 : Teorema de los intervalos encajados y de existencia de la raiz n-ésima de un número real estrictamente positivo 419
§2 : Teorema de Toeplitz 425
§3 : Valores de adherencia. Límite superior e inferior 430
§4 : El conjunto $\overline{\mathbb{R}}$. Sucesiones divergentes 443

Capítulo XI: Series de números reales.
§1 : Series de números reales: consideraciones algebraicas 474
§2 : Series de números reales: convergencia 485
§3 : Series de términos positivos 499
§4 : Series alternadas 524
§5 : Series de números reales de términos arbitrarios 529

APENDICE: §1. AXIOMATICA VON NEUMANN-BERNAYS-GODEL 567
§2. AXIOMATICA ZERMELO-FRAENKEL 568

Bibliografía 571
Indice de notaciones 573
Indice de autores 575
Indice alfabético 577

0

CALCULO DE PROPOSICIONES

Pretendemos, en primer lugar, introducir y analizar una serie de cuestiones relacionadas con la Lógica Matemática y, más concretamente, con el cálculo proposicional que consideramos indispensable para poder desarrollar una teoría de clases y conjuntos, en particular la de Von Neumann-Bernays-Gödel que será objeto de nuestro estudio.

Conviene, no obstante, advertir que no tratamos de describir toda una teoría relativa a la Lógica Matemática lo que, de por sí, ya constituiría materia para otro texto, sino que trataremos de elaborar los cimientos precisos de un lenguaje formal que nos permita abordar, presentar y desarrollar, con la necesaria coherencia y rigor, nuestra teoría de clases y conjuntos.

Según Godement existen, en Matemáticas, tres procesos fundamentales; primero, el de construcción de unos entes denominados objetos matemáticos, segundo, el de enunciación de juicios relativos a dichos objetos matemáticos, denominados proposiciones, y el tercer proceso fundamental, base del cálculo proposicional, consiste en el estudio de la veracidad o falsedad de tales juicios.

En la Lógica Matemática, la veracidad o falsedad de una proposición no ha de concebirse, en general, como una "propiedad" inherente a dicha proposición. Esta será verdadera si lo establecemos así en la introducción de la teoría y en tal caso la proposición recibe el nom-

bre de axioma, o bien si su veracidad se deduce a partir de la veracidad de otras proposiciones mediante un esquema, que denominaremos razonamiento lógico, y en tal caso la proposición recibe el nombre de teorema (lema, corolario o, simplemente, proposición de la teoría).

En el cálculo de proposiciones suelen elaborarse proposiciones, denominadas complejas, a partir de determinadas proposiciones denominadas simples iniciales. En este sentido, una determinada proposición compleja quedará definida cuando se establezcan sus valores, de veracidad o falsedad, en función de todos los valores que pueden ser atribuidos a las proposiciones simples iniciales; y al esquema que permite obtener los valores de la proposición compleja a partir de los valores de las proposiciones iniciales se le denomina "tabla de verdad" de la proposición.

En nuestra teoría admitiremos, en primer lugar, el principio del tercio excluso y el principio de no contradicción. El principio del tercio excluso establece que una proposición cualquiera es verdadera o es falsa; y el principio de no contradicción establece que no puede existir una proposición que sea, simultáneamente, verdadera y falsa (una tal proposición recibe el nombre de contradicción).

Así mismo, dados dos objetos matemáticos a y b admitiremos la existencia de una proposición, que notaremos a=b, que leeremos "el objeto matemático a es igual al objeto matemático b", verificando las siguientes propiedades:

1^a.- Para cada objeto matemático a la proposición a = a es verdadera.

2^a.- Si a y b son objetos matemáticos y la proposición a = b es verdadera entonces la proposición b = a es verdadera.

3^a.- Si a, b y c son objetos matemáticos y las proposiciones a=b y b=c son verdaderas entonces la proposición a=c es verdadera.

Admitiremos, también dados dos objetos matemáticos a y b la existencia de una proposición, que notaremos $a \in b$, y que leeremos "el objeto matemático a pertenece al objeto matemático b" o bien "el objeto matemático a es un elemento del objeto matemático b".

CONECTIVOS LOGICOS

Negación de una proposición: Si p es una proposición entonces definimos la proposición "negación de p", que notaremos $\neg p$ (o bien "no p"), así: la negación de p es verdadera sí y sólo sí la proposición p es falsa.

La negación de la proposición $a=b$ la notaremos $a \neq b$, y leeremos "a es distinto de b".

La negación de la proposición $a \in b$ la notaremos $a \notin b$.

Disyunción de dos proposiciones: Si p y q son dos proposiciones entonces definimos la proposición "disyunción de p y de q", que notaremos $p \vee q$, así: la disyunción de p y de q es verdadera sí y sólo sí es verdadera la proposición p o es verdadera la proposición q; o equivalentemente la disyunción de p y de q es falsa sí y sólo sí es falsa p y es falsa q.

Conjunción de dos proposiciones: Si p y q son dos proposiciones entonces definimos la proposición "conjunción de p y de q", que notaremos $p \wedge q$, así: es la proposición $\neg[(\neg p) \vee (\neg q)]$.

La tabla de verdad de la conjunción de p y de q será, pues:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$[(\neg p) \vee (\neg q)]$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

Es decir, la proposición $p \wedge q$ es verdadera sí y sólo sí son verdaderas simultáneamente las proposiciones p y q.

Implicación lógica: Si p y q son dos proposiciones entonces definimos la proposición "implicación lógica de q a partir de p", que notaremos $p \Rightarrow q$ y que leeremos "p implica q", del siguiente modo: es la proposición $q \vee (\neg p)$.

En tal caso, a la proposición p se le denomina antecedente de la implicación y a la proposición q se le denomina consecuente. La tabla de verdad de $p \Rightarrow q$ será, pues:

p	q	$\neg p$	$q \vee (\neg p)$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Es decir, la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa sí y sólo sí es verdadera la proposición p y falsa la proposición q. Obsérvese que la proposición implicación es verdadera siempre que sea verdadero el consecuente, no obstante puede también ser verdadera aún siendo falso el

consecuente (concretamente, cuando sea falso el antecedente); por tanto, es importante hacer hincapié en el hecho de que de la veracidad de una implicación no se concluye, obligatoriamente, la veracidad del consecuente.

Equivalencia lógica o doble implicación: Si p y q son dos proposiciones entonces definimos la proposición "equivalencia lógica de p y q o doble implicación de q a partir de p", que notaremos $p \Leftrightarrow q$, que leeremos "p doble implicación q, o p equivalente a q o, incluso, p sí y sólo sí q", del siguiente modo: es la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

La tabla de verdad de la proposición $p \Leftrightarrow q$ será, pues:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Es decir, que la proposición $p \Leftrightarrow q$ es verdadera sí y sólo sí las proposiciones p y q poseen los mismos valores.

Definición: Una fórmula del álgebra de proposiciones (posteriormente se justificará la nomenclatura "álgebra" de proposiciones) es una proposición compleja obtenida a partir de unas proposiciones simples iniciales mediante los conectivos lógicos: $\neg$; $\vee$; $\wedge$; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$

Definición: Una fórmula del álgebra de proposiciones diremos que es una tautología o idénticamente verdadera sí y sólo sí es verdadera, inde-

pendientemente del sistema de valores atribuido a las proposiciones simples iniciales que determinan la fórmula.

Del principio del tercio excluso se deduce que si p es una proposición entonces $p \vee (\neg p)$ es una tautología.

Definición: Una fórmula del álgebra de proposiciones diremos que es idénticamente falsa sí y sólo sí su negación es una tautología o, equivalentemente, sí y sólo sí es falsa con independencia del sistema de valores atribuidos a las proposiciones simples iniciales que determinan la fórmula.

Del principio de no contradicción se deduce que si p es una proposición entonces $p \wedge (\neg p)$ es idénticamente falsa.

Definición: Dos fórmulas del álgebra de proposiciones p y q diremos que son lógicamente equivalentes, y lo notaremos $p \equiv q$, sí y sólo sí la proposición $p \Leftrightarrow q$ es una tautología, o con otras palabras, sí y sólo sí las correspondientes tablas de verdad de p y q coinciden.

Proposición 1

Si p, q y r son fórmulas del álgebra de proposiciones, entonces se verifican las siguientes propiedades:

a) Asociativa.

- relativa a la disyunción: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- relativa a la conjunción: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

b) Conmutativa.

- relativa a la disyunción: $p \vee q \equiv q \vee p$
- relativa a la conjunción: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

c) Distributiva.

- de la disyunción respecto de la conjunción: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- de la conjunción respecto de la disyunción: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

d) Si notamos por 0 una fórmula idénticamente falsa y por 1 una tautología, entonces

$$p \vee 0 \equiv p \qquad p \wedge 1 \equiv p$$
$$p \vee (\neg p) \equiv 1 \qquad p \wedge (\neg p) \equiv 0$$

Demostración: La demostración de esta proposición consiste en confeccionar las tablas de verdad de las fórmulas de cada miembro y comprobar la coincidencia de dichas tablas.

Como ejemplo concreto demostraremos la propiedad distributiva de la disyunción respecto de la conjunción

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

La demostración concluye observando que las tablas de verdad de $p \vee (q \wedge r)$ y de $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ coinciden.

Para los restantes apartados el razonamiento es análogo. □

Por verificarse estas cuatro propiedades, suele decirse que las proposiciones poseen estructura de álgebra de Boole respecto de la negación, disyunción y conjunción de proposiciones. □

Otras propiedades interesantes de las proposiciones lógicamente equivalentes son:

a) Idempotencia

- relativa a la disyunción: $p \vee p \equiv p$
- relativa a la conjunción: $p \wedge p \equiv p$

b) Leyes de Morgan

- relativa a la disyunción: $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
- relativa a la conjunción: $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

c) Absorción

- de la disyunción respecto de la conjunción: $p \vee (q \wedge p) \equiv p$
- de la conjunción respecto de la disyunción: $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

d) $p \vee 1 \equiv 1$ y $p \wedge 0 \equiv 0$.

e) Si q es una proposición que verifica $p \vee q \equiv 1$ y $p \wedge q \equiv 0$ entonces q es lógicamente equivalente a la negación de la proposición p.

f) $\neg(\neg p) \equiv p$

g) $[p \Rightarrow q] \equiv [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$

h) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

Las demostraciones de estas propiedades son análogas a las anteriores, a partir de las correspondientes tablas de verdad; no obstante, pueden deducirse directamente, si bien de una manera más compleja, a partir de la proposición anterior.

□

Tautologías importantes

Todas las propiedades de las proposiciones lógicamente equivalentes nos proporcionan ejemplos interesantes de tautologías.

Puede comprobarse sin dificultad que si p, q y r son proposiciones entonces las siguientes fórmulas del álgebra de proposiciones son tautologías:

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow (\neg p)$

c) $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$

d) $p \Rightarrow (p \vee q)$

e) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

f) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow q]$

h) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow r]$

□

RAZONAMIENTO LOGICO

Definición: Un razonamiento lógico es una proposición implicación tal que el antecedente es, a su vez, una conjunción de proposiciones (de-

nominadas premisas del razonamiento). El consecuente recibe el nombre de conclusión del razonamiento lógico.

Definición: Diremos que un razonamiento lógico es válido si y sólo sí la proposición compleja que lo define es una tautología; o equivalentemente, sí y sólo sí de la veracidad de todas las premisas se deduce obligatoriamente la veracidad de la conclusión del razonamiento lógico.

Resulta, pues, que los razonamientos lógicos válidos determinan teoremas. Las premisas de un razonamiento lógico válido reciben el nombre de hipótesis y la conclusión se denomina tesis del razonamiento.

Predicados o funciones proposicionales sobre objetos matemáticos. Si A es un objeto matemático entonces una variable (objeto variable) x en A representa un elemento arbitrario de dicho objeto; si asociamos a x un elemento concreto (objeto individual) de A diremos que la variable x "ha tomado un valor de A".

Definición: Un enunciado F(x), en el que pueda o no aparecer la variable x, diremos que es un predicado o función proposicional sobre el objeto matemático A sí y sólo sí para cada valor de la variable x en A el enunciado F(x) es una proposición.

Si en un predicado no aparece la variable de A entonces diremos que es constante sobre A. Si la variable de un cierto predicado puede tomar como valor cualquier objeto matemático entonces diremos que el predicado es universal.

Es interesante tener presente que un predicado sobre un objeto matemático no es, en general, una proposición, si bien da lugar a una serie de proposiciones cuando asignamos valores a la variable del predicado. Debido a la conexión existente entre predicados y proposiciones podemos introducir, de manera natural, los conceptos de negación, disyunción y conjunción de predicados sobre un mismo objeto matemático A.

En consecuencia, si $F(x)$ es un predicado sobre A definimos el predicado negación de $F(x)$, que notaremos $(\neg F)(x)$, al predicado que asigna a cada valor a de la variable x sobre A, la proposición $\neg(F(a))$.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son predicados sobre A entonces definimos el predicado disyunción (respectivamente, conjunción) de $F(x)$ y $G(x)$ sobre A, que notaremos $(F \vee G)(x)$ (respectivamente, $(F \wedge G)(x)$), al predicado que asigna a cada valor a de la variable x sobre A, la proposición $F(a) \vee G(a)$ (respectivamente $F(a) \wedge G(a)$).

De estas definiciones resulta, inmediatamente, que las propiedades anteriormente enunciadas para fórmulas del álgebra de proposiciones, se traducen a predicados sobre un mismo objeto matemático.

Cuantificadores sobre un objeto matemático.

Si A es un objeto matemático y $F(x)$ es un predicado sobre A, entonces admitiremos la existencia de una proposición, que denominaremos cuantificador universal de $F(x)$ sobre A, que notaremos $(\forall x)(x \in A)(F(x))$ (o, más brevemente, $(\forall x)(F(x))$, si no ha lugar a confusión respecto del objeto matemático sobre el que se considera el cuantificador) y leeremos "para cada x, $x \in A$, $F(x)$", de tal manera que es verdadera sí y sólo sí para cada valor a de la variable x en A la proposición $F(a)$ es verdadera.

Obsérvese que el cuantificador universal $(\forall x)(x \in A)(F(x))$ no depende de la variable x sino únicamente del objeto matemático A y de la estructura lógica del predicado $F(x)$ sobre A.

Definición: El cuantificador existencial de $F(x)$ sobre el objeto matemático A, que notaremos $(\exists x)(x \in A)(F(x))$, o más brevemente $(\exists x)(F(x))$, y leeremos "existe al menos un elemento $x \in A$ tal que $F(x)$", es la proposición: $\neg[(\forall x)(\neg F(x))]$. Dicho con otras palabras,

el cuantificador existencial de $F(x)$ sobre A es verdadero sí y sólo sí para algún valor a de la variable x sobre A, la proposición $F(a)$ es verdadera.

Proposición 2

Se verifica: $(\forall x)(F(x)) \equiv \neg[(\exists x)(\neg F(x))]$, considerándose los cuantificadores sobre el mismo objeto matemático A.

Demostración:

$$\neg[(\exists x)(\neg F(x))] \equiv \neg[\neg(\forall x)(\neg\neg F(x))] \equiv \neg\neg(\forall x)(F(x)) \equiv (\forall x)(F(x))$$

□

Proposición 3

Si $F(x)$ y $G(x)$ son predicados sobre un objeto matemático A entonces se verifica:

a) $[(\forall x)((F \wedge G)(x))] \equiv [(\forall x)((F(x))) \wedge (\forall x)(G(x))]$

b) $[(\exists x)((F \vee G)(x))] \equiv [(\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))]$

Demostración:

a) Sea a un elemento arbitrario del objeto matemático A y suponga mos que la proposición $(\forall x)((F \wedge G)(x))$ es verdadera, entonces $F(a) \wedge G(a)$ es verdadera y, por tanto, lo serán también $(\forall x)(F(x))$ sobre A y $(\forall x)(G(x))$ sobre A, luego es una tautología la proposición

$$[(\forall x)((F \wedge G)(x))] \Rightarrow [(\forall x)((F(x)) \wedge (\forall x)(G(x))]$$

Análogamente se demuestra que la implicación recíproca es una tautología.

b) $(\exists x)((F \vee G)(x)) \equiv \neg[(\forall x)(\neg(F \vee G)(x))] \equiv \neg[(\forall x)((\neg F) \wedge (\neg G)(x))] \equiv$
$\equiv \neg[(\forall x)(\neg F(x)) \wedge (\forall x)(\neg G(x))] \equiv (\neg[(\forall x)(\neg F(x))]) \vee (\neg[(\forall x)(\neg G(x)]) \equiv$
$\equiv (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$.

□

Corolario

Si p es una proposición y F(x) es un predicado sobre el objeto matemático A entonces se verifica:

a) $(\forall x)[p \wedge F(x)] \equiv p \wedge (\forall x)(F(x))$
b) $(\exists x)[p \vee F(x)] \equiv p \vee (\exists x)(F(x))$

En efecto: basta observar que $(\forall x)p \equiv p$ y $(\exists x)p \equiv p$.

□

Proposición 4

Si F(x) y G(x) son predicados sobre un objeto matemático A entonces se verifica:

a) $[(\forall x)F(x) \vee (\forall x)(G(x))] \Rightarrow [(\forall x)((F \vee G)(x))]$
b) $[(\exists x)((F \wedge G)(x))] \Rightarrow [(\exists x)(F(x)) \wedge (\exists x)(G(x))]$

Además, las implicaciones recíprocas son falsas, en general.

Demostración

a) Si la proposición $(\forall x)(F(x)) \vee (\forall x)(G(x))$ es verdadera entonces, para cada elemento a de A, F(a) es verdadera o G(a) es verdadera, luego $F(a) \vee G(a)$ es verdadera, por tanto lo será la proposición $(\forall x)((F \vee G)(x))$.

b) Si la proposición $(\exists x)((F \wedge G)(x))$ es verdadera, sea entonces a un elemento de A tal que $F(a) \wedge G(a)$ es verdadera, de donde re-

sulta la veracidad de las proposiciones $F(a)$ y $G(a)$ y, por tanto, la veracidad de $(\exists x)(F(x)) \wedge (\exists x)(G(x))$.

Veamos a continuación que las implicaciones recíprocas de a) y b) son falsas, en general. En efecto, notemos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales (que será introducido en la teoría de clases) y consideremos sobre $\mathbb{N}$ los siguientes predicados:

$F(x)$: "x es un número natural par"
$G(x)$: "x es un número natural impar".

En tal situación, son verdaderas las proposiciones

$$(\forall x)((F \vee G)(x)) \quad \text{y} \quad (\exists x)(F(x)) \wedge (\exists x)(G(x)) \ ;$$

en cambio son falsas las proposiciones

$$(\forall x)(F(x)) \vee (\forall x)(G(x)) \quad \text{y} \quad (\exists x)((F \wedge G)(x))$$

(considerándose todos los cuantificadores anteriores sobre $\mathbb{N}$). □

Proposición 5

Si p es una proposición y $F(x)$ es un predicado sobre el objeto matemático A entonces se verifica:

a) $(\forall x)[p \vee F(x)] \equiv p \vee (\forall x)(F(x))$
b) $(\exists x)[p \wedge F(x)] \equiv p \wedge (\exists x)(F(x))$

Demostración:

a) Teniendo presente la proposición 4 todo se reduce a establecer la veracidad de $[(\forall x)(p \vee (F(x)))] \Rightarrow [p \vee (\forall x)(F(x))]$. Si suponemos que la proposición $(\forall x)(p \vee F(x)))$ es verdadera entonces, o bien p es

verdadera en cuyo caso lo será asímismo $p \vee (\forall x)(F(x))$, o bien p es falsa en cuyo caso ha de ser verdadera la proposición $(\forall x)(F(x))$ y, por tanto, también verdadera $p \vee (\forall x)(F(x))$.

b) $(\exists x)[p \wedge F(x)] \equiv \neg[(\forall x) \neg(p \wedge F(x))] \equiv \neg[(\forall x)(\neg p) \vee (\neg F(x))] \equiv$
$\equiv \neg(\neg p) \wedge (\neg[(\forall x)(\neg F(x))]) \equiv p \wedge (\exists x)(F(x))$

□

Corolario

Si $F(x)$ y $G(x)$ son predicados sobre el objeto matemático A, entonces se verifica:

a) $[(\forall x)(F(x))] \vee [(\forall x)(G(x))] \equiv (\forall x)(\forall y)[F(x) \vee G(y)]$
b) $[(\exists x)(F(x))] \wedge [(\exists x)(G(x))] \equiv (\exists x)(\exists y)[F(x) \wedge G(y)]$

En efecto: para la demostración del apartado a) téngase presente que

$(\forall x)(\forall y)\ [F(x) \vee G(y)] \equiv (\forall x)[F(x) \vee (\forall y)(G(y))] \equiv [(\forall x)F(x)] \vee [(\forall y)G(y)]$

y análoga consideración para el apartado b).

□

Predicados de varias variables sobre un objeto matemático

Si A es un objeto matemático y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables sobre dicho objeto entonces un enunciado $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, en el que puede o no aparecer las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, diremos que es un predicado de n variables sobre A sí y sólo sí para cada sistema de valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de las respectivas variables la expresión $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una proposición.

Obsérvese que si damos valores $a_2, \ldots, a_n$ a las variables $x_2, \ldots, x_n$ entonces $F(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ determina un predicado de una va--

riable sobre A y, por tanto, $(\forall x_1)F(x_1,a_2,\ldots,a_n)$ y $(\exists x_1)F(x_1,a_2,\ldots,a_n)$ son proposiciones; luego, las expresiones $(\forall x_1)F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y $(\exists x_1)(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pueden considerarse predicados de n-1 variables sobre A. □

Puede comprobarse, sin dificultad, que los predicados de dos variables $F(x_1,x_2)$ sobre un objeto matemático A verifican las propiedades:

a) $(\forall x_1)(\forall x_2)F(x_1,x_2) \equiv (\forall x_2)(\forall x_1)F(x_1,x_2)$

b) $(\exists x_1)(\exists x_2)F(x_1,x_2) \equiv (\exists x_2)(\exists x_1)F(x_1,x_2)$

Es decir, que los cuantificadores universales conmutan entre sí, así como los cuantificadores existenciales; no obstante, un cuantificador universal y un cuantificador existencial no conmutan entre sí, aunque puede asegurarse que la proposición

$$(\exists x_1)(\forall x_2)F(x_1,x_2) \quad \Rightarrow \quad (\forall x_2)(\exists x_1)F(x_1,x_2)$$

es una tautología. La implicación recíproca no es, en general, idénticamente verdadera (por ejemplo, considérese en $\mathbb{N}$ el predicado $F(x_1,x_2)$: "$x_1=x_2$").

□ □ □

1

AXIOMATICA DE LA TEORIA DE CLASES

§1: PRIMEROS AXIOMAS DE LA TEORIA DE CLASE

Introducción

A finales del pasado siglo (entre 1879 y 1884) y como resultado de unas investigaciones sobre números cardinales y números ordinales, Georg Cantor formula sistemáticamente su teoría intuitiva de conjuntos en la cual proporcionaba una "pseudodefinición" de conjunto (se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestra mente) que permitía considerar toda "colección" de objetos caracterizada por una propiedad, como un conjunto.

La aparición de paradojas en la teoría de conjuntos (existencia de contradicciones que hacen inconsistente la teoría) no se hace esperar; entre ellas destaca la de Burali-Forti ("la colección de todos los números ordinales es un conjunto") que fué descubierta en realidad por el propio Cantor, comunicándosela a Hilbert en 1896, si bien Burali-Forti la descubrió al parecer independientemente publicándola; y la de Bertrand Russell que data de 1903 ("si la colección de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismo es un conjunto, entonces dicho conjunto verificaría la propiedad de ser elemento de sí mismo sí y sólo sí no es elemento de sí mismo").

El rechazo de las ideas revolucionarias que subyacían en la teoría

intuitiva de conjuntos por matemáticos tan ilustres como Kronecker y la aparición de paradojas en la teoría, provocaría una grave crisis nerviosa en Cantor de la que nunca se recuperaría (falleciendo en una clínica psiquiátrica en 1918).

Ante esta situación, Zermelo opta por la vía axiomática como el camino más adecuado para soslayar las paradojas aparecidas; y así elabora en 1908 el primer sistema de axiomas de la teoría de conjuntos que, posteriormente, sería completado por Fraenkel en 1922. La teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel (Z-F) utiliza los conceptos de "conjunto" y "pertenencia" como primitivos o indefinibles: ahora bien, dicha teoría no responde en su totalidad a la idea original de Cantor debido a que dada una propiedad o predicado universal no existe, en general, una "colección" (un conjunto en la teoría Z-F) tal que un objeto matemático pertenezca a ella sí y sólo sí verifica dicha propiedad. Por tanto en la axiomática Z-F existen propiedades que no caracterizan (o no "determinan") a un conjunto y que reciben el nombre de "no colectivizantes".

La teoría axiomática de clases y conjuntos que desarrollaremos en el presente libro es debida a Von Neumann (1925), Bernays (1937) y Gödel (1938), en la cual los conceptos primitivos son los de "clase" y "pertenencia" mientras que el concepto de "conjunto" es definido a partir de éstos, de tal manera que los "conjuntos" de la teoría Von Neumann-Bernays-Gödel (N-B-G) corresponden en la teoría Z-F a las colecciones de objetos matemáticos caracterizados por una propiedad "colectivizante". Más aún, la teoría axiomática N-B-G asocia a cada propiedad o predicado universal una "colección" (una clase en la teoría N-B-G), respondiendo así más fielmente que la teoría Z-F a la idea intuitiva de Cantor.

Si bien no vamos a entrar en detalles respecto a las conexiones existentes entre las teorías N-B-G y Z-F es interesante observar que ambas coinciden sobre los conjuntos, es decir que todo teorema de la teoría Z-F es un teorema de la teoría N-B-G y, recíprocamente, todo

teorema de la teoría N-B-G en el que intervengan únicamente conjuntos es un teorema de la teoría Z-F.

□

Los objetos matemáticos de nuestra teoría son las clases. Si F(x) es un predicado universal entonces admitiremos como concepto primitivo e indefinible de la teoría el de "clase de los objetos matemáticos tales que F(x)", que la notaremos $\{x: F(x)\}$.

Definición: Una clase x diremos que es un conjunto sí y sólo sí existe una clase y tal que $x \in y$.

Dicho con otras palabras, por definición un conjunto es una clase que pertenece a alguna clase; si una clase no es un conjunto entonces diremos que es una clase propia.

Siguiendo la idea de Cantor, sería muy natural establecer que un objeto matemático a pertenece a la clase $\{x: F(x)\}$ sí y sólo sí la proposición F(a) es verdadera, es decir sí y sólo sí el objeto matemático a verifica la propiedad F(x) que "define" la clase $\{x:F(x)\}$. Pues bien, veamos que en tal situación nuestra teoría daría lugar a paradojas (existencia de contradicciones).

En efecto, consideremos el predicado universal F(x): "$x \notin x$" y notemos $R = \{x: x \notin x\}$. Dado el objeto matemático R ¿pertenecerá a la clase R?. En el supuesto de partida concluiríamos que

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R \qquad (1)$$

lo que implicaría la existencia de contradicciones en nuestra teoría, lo cual no es posible gracias al principio de no contradicción. La paradoja anterior es conocida por el nombre de paradoja de Russell y el primer axioma de la teoría nos va a permitir soslayar dicha dificultad.

□

AXIOMA I (de clasificación)

Un objeto matemático a pertenece a la clase $\{x: F(x)\}$ sí y sólo sí la proposición $F(a)$ es verdadera y, además, a es un conjunto.

Es interesante observar que el axioma de clasificación no establece una "definición" de la pertenencia de un objeto matemático a una clase, sino que hemos de interpretar dicho axioma en el sentido de que nos proporciona una caracterización de la pertenencia.

Resultará, pues, que los únicos objetos matemáticos que pueden ser elementos de una clase son los conjuntos y, por tanto, la proposición (1) se expresará ahora así:

$$[R \in R] \Leftrightarrow [(R \notin R) \wedge (R \text{ es conjunto})]$$

Más adelante, y como consecuencia de otros axiomas de la teoría de clases, demostraremos que $R = \{x: x \notin x\}$ (denominada clase de Russell) es una clase propia y la proposición $R \in R$ es falsa, de donde deduciremos que la proposición

$$[R \in R] \Leftrightarrow [(R \notin R) \wedge (R \text{ es conjunto})]$$

es una tautología, resolviendo así la paradoja de Russell.

Definición: Diremos que la clase a es una subclase o una parte de la clase b, y lo notaremos $a \subset b$ o también $b \supset a$, sí y sólo sí

$$(\forall x)(x \in a \Rightarrow x \in b).$$

Si a es una subclase de b diremos también que la clase a está incluida o contenida en b, o bien que la clase b incluye o contiene a la clase a.

Si $(a \subset b \wedge a \neq b)$ entonces notaremos $a \subsetneq b$ o $b \supsetneq a$ y diremos que la inclusión es estricta.

Como consecuencia inmediata de la anterior definición, se verifican las propiedades:

a) Si x es una clase entonces $x \subset x$

b) Si x,y,z son clases entonces $(x \subset y \wedge y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$

□

AXIOMA II (de extensión)

Dos clases a y b son iguales, y lo notaremos a=b, sí y sólo sí $a \subset b$ y $b \subset a$.

Definimos la clase vacía, que notaremos por $\emptyset$, y la clase universal, que notaremos por U, a las clases:

$$\emptyset = \{x: x \neq x\} \qquad U = \{x: x = x\} ;$$

de donde resulta que la clase vacía carece de elementos y la clase universal U es tal que

"$x \in U$ sí y sólo sí x es un conjunto"

es decir, la clase universal es la clase cuyos elementos son todos los conjuntos.

Si a es una clase cualquiera, entonces se verifica, trivialmente que $\emptyset \subset a \subset U$ y, por tanto, si una clase a carece de elementos resultará $(\forall x)(x \in a \Rightarrow x \in \emptyset)$ de donde deducimos $a \subset \emptyset$, es decir $a = \emptyset$. Por tanto, la clase vacía está caracterizada por la condición de ser la clase que carece de elementos.

Definiciones: Si a y b son clases, entonces definimos

a) Clase unión o reunión de a y b, que notaremos $a \cup b$:

$$a \cup b = \{x: (x \in a) \vee (x \in b)\}$$

b) Clase intersección de a y b, que notaremos $a \cap b$:

$$a \cap b = \{x: (x \in a) \wedge (x \in b)\}$$

c) Clase diferencia de a y b, que notaremos a-b:

$$a - b = \{x: (x \in a) \wedge (x \notin b)\}$$

En el caso particular $a \supset b$, a la clase diferencia a-b se le denomina, también, clase complementaria de b en la clase a, y se suele notar C_b^a

d) Clase intersección de los elementos de a, que notaremos $\bigcap a$:

$$\bigcap a = \{x: (\forall y)(y \in a \Rightarrow x \in y)\}$$

e) Clase unión o reunión de los elementos de a, que notaremos $\bigcup a$:

$$\bigcup a = \{x: (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)\}$$

f) Diremos que dos clases son disjuntas sí y sólo sí su intersección es la clase $\emptyset$

Como consecuencia inmediata de estas definiciones, y de las propiedades de las proposiciones lógicamente equivalentes, se verifican:

Proposición 1 (Asociativa)

a) relativa a la reunión:
Si x,y,z son clases entonces $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$

b) relativa a la intersección:
Si x,y,z son clases entonces $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$

Proposición 2 (Conmutativa)

a) relativa a la reunión:

Si x,y son clases entonces $x \cup y = y \cup x$

b) relativa a la intersección:

Si x,y son clases entonces $x \cap y = y \cap x$

Proposición 3 (Distributiva)

a) de la reunión respecto de la intersección:

Si x,y,z son clases entonces $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

b) de la intersección respecto de la reunión:

Si x,y,z son clases entonces $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

Proposición 4

Si x es una clase entonces se verifica:

a) $x \cup \emptyset = x$

b) $x \cap U = x$

Proposición 5

Si x es una clase entonces se verifica:

a) $x \cup (U-x) = U$

b) $x \cap (U-x) = \emptyset$

Proposición 6

Si x es una clase entonces se verifica:

a) $x \cap \emptyset = \emptyset$

b) $x \cup U = U$

Proposición 7 (Idempotencia)

a) relativa a la reunión:
Si x es una clase entonces $x \cup x = x$

b) relativa a la intersección:
Si x es una clase entonces $x \cap x = x$

Proposición 8 (Leyes de Morgan)

a) relativa a la reunión:
Si x,y,z son clases entonces $x - (y \cup z) = (x - y) \cap (x - z)$

b) relativa a la intersección:
Si x,y,z son clases entonces $x - (y \cap z) = (x - y) \cup (x - z)$

Proposición 9 (Absorción)

a) de la reunión respecto de la intersección:
Si x,y son clases entonces $x \cup (y \cap x) = x$

b) de la intersección respecto de la reunión:
Si x,y son clases entonces $x \cap (y \cup x) = x$

Proposición 10

Si x,y son clases entonces se verifica:

a) $x \subset y \Rightarrow \bigcup x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset \bigcap x$
b) $x \in y \Rightarrow x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset x$

□

AXIOMA III (del conjunto de partes)

Si a es un conjunto entonces existe un conjunto, que notaremos $P(a)$ y denominaremos "conjunto de partes de a", que verifica la si

guiente condición: una clase x es subclase de a sí y sólo sí $x \in P(a)$.

Consecuencia inmediata de este axioma es que toda subclase de un conjunto a es también un conjunto, ya que es elemento de una clase: el conjunto $P(a)$; a las subclases de los conjuntos las denominaremos subconjuntos.

Resulta pues que si existe un conjunto, lo cual en nuestra axiomática no podrá demostrarse e impondremos como axioma, entonces la clase vacía será un conjunto por ser subclase de dicho conjunto.

Proposición 11

Si x es una clase no vacía entonces la clase $\bigcap x$ es un conjunto.

Demostración:

Puesto que $x \neq \emptyset$ existirá una clase a tal que $a \in x$, luego $\bigcap x \subset a$ y a es un conjunto, y en consecuencia la clase $\bigcap x$ es un conjunto.

□

Proposición 12

a) $u = \bigcup u$

b) $\emptyset = \bigcap u$

c) $\bigcap \emptyset = u$

d) $\bigcup \emptyset = \emptyset$

Demostración:

a) Puesto que $\bigcup u \subset u$, será suficiente demostrar $u \subset \bigcup u$
Si $x \in u$ entonces $P(x) \in u$ y $x \in P(x)$, luego $x \in P(x) \in u$, es decir $x \in \bigcup u$.

b) Puesto que $\emptyset \subset \bigcap U$, será suficiente demostrar $\bigcap U \subset \emptyset$
Si $x \in \bigcap U$ entonces $(\forall y)(y \in U \Rightarrow x \in y)$; con otras palabras, x pertenece a la clase $\bigcap U$ sí y sólo sí x pertenece a cualquier conjunto y además, x es un conjunto. Si existiera un tal x entonces, teniendo presente que $\emptyset \subset x$ deduciríamos $\emptyset \in U$ y por tanto, $x \in \emptyset$: lo que es una contradicción.

c) $\bigcap \emptyset = \{x: (\forall y)(y \in \emptyset \Rightarrow x \in y)\} = U$, ya que para cada $x \in U$ la proposición $(\forall y)(y \in \emptyset \Rightarrow x \in y)$ es verdadera.

d) $\bigcup \emptyset = \{x: (\exists y)(y \in \emptyset \wedge x \in y)\} = \emptyset$, ya que la proposición $(\exists y)(y \in \emptyset \wedge x \in y)$ es idénticamente falsa.

□

AXIOMA IV (de la unión)

Si las clases a y b son conjuntos entonces la clase $a \cup b$ es un conjunto.

Simpletes y dobletes

Definición: Si a es una clase entonces definimos el simplete de a, que notaremos $\{a\}$, a la clase

$$\{a\} = \{x: a \in U \Rightarrow x = a\}$$

Proposición 13

a) $(\forall x)$ $(x \in U \Rightarrow \{x\} \in U$ y x es el único elemento de $\{x\})$

b) Si x es una clase propia entonces $\{x\} = U$

Demostración:

a) Si $x \in U$ y notamos por $F(y)$ el predicado "$x \in U \Rightarrow y = x$" entonces resulta que la proposición $F(z)$ es verdadera para un objeto mate

mático z sí y sólo sí z=x, y puesto que $x \in U$ deducimos que x es el único elemento de la clase $\{x\}$.
Ahora bien, teniendo presente que $P(x) \in U$ y $\{x\} \subset P(x)$ concluimos que $\{x\}$ es un conjunto.

b) Puesto que $(\forall x)(\{x\} \subset U)$, tendremos que demostrar que si $x \notin U$ entonces $U \subset \{x\}$.
Teniendo presente que $(\forall y)(y \in U \Rightarrow F(y)$ verdadera $\wedge y \in U)$ resulta $(\forall y)(y \in U \Rightarrow y \in \{x\})$ de donde conluimos $U = \{x\}$

□

Definición: Si a y b son dos clases entonces definimos el doblete, o par no ordenado, de a y b, que notaremos $\{a,b\}$, a la clase:

$$\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$$

Proposición 14

a) $(\forall x)(\forall y)(x \in U \wedge y \in U \Rightarrow \{x,y\} \in U \wedge$ los únicos elementos de $\{x,y\}$ son x e y)

b) Si x o y son clases propias entonces $\{x,y\} = U$

Demostración:

a) Si $x \in U$ e $y \in U$ entonces, por la proposición anterior deducimos que $\{x\} \in U$ e $\{y\} \in U$, por tanto del axioma de la unión resultará $\{x,y\} = \{x\} \cup \{y\} \in U$. Además $(\forall z)(z \in \{x\} \Leftrightarrow z = x)$ y $(\forall z)(z \in \{y\} \Leftrightarrow z = y)$, luego $(\forall z)(z \in \{x,y\} = \{x\} \cup \{y\} \Leftrightarrow z = x \vee z = y)$; es decir, los únicos elementos del doblete $\{x,y\}$ son x e y.

b) Si $x \notin U$ entonces $\{x\} = U$, por tanto

$$\{x,y\} = \{x\} \cup \{y\} = U \cup \{y\} = U$$

Análogo resultado obtenemos si $y \notin U$. □

AXIOMA V (de regularidad)

Si a es una clase no vacía entonces existe un elemento x de la clase a que verifica $a \cap x = \emptyset$.

El axioma de regularidad (también denominado frecuentemente, axioma de fundamentación) permite considerar de cada clase no vacía un elemento, al menos, de dicha clase que es disjunto con la clase misma.

Es interesante tener presente (lo cual se establece en el problema nº 20 del capítulo VI) que en la axiomática N-B-G prescindiendo del axioma V las proposiciones

a) Axioma de regularidad
b) Si a es un conjunto no vacío entonces existe un elemento x del conjunto a que verifica $a \cap x = \emptyset$

son lógicamente equivalentes, lo cual permite considerar la proposición b) como axioma V de la teoría axiomática N-B-G.

Veamos seguidamente algunas consecuencias importantes de este axioma, a partir de las cuales resolveremos completamente la paradoja de Russell.

Proposición 15

Si x es una clase entonces $x \notin x$

Demostración:

Supongamos que la proposición $x \in x$ es verdadera. En tal situación, la clase x sería un conjunto y por tanto la clase $\{x\}$ sería también un conjunto, cuyo único elemento es el conjunto x. Puesto que

$\{x\} \neq \emptyset$ del axioma de regularidad deducimos (por ser x el <u>único</u> elemento de $\{x\}$) que $x \cap \{x\} = \emptyset$ y, por tanto, resultará $x \notin x$: lo que contradice el supuesto inicial.

□

<u>Corolario 1</u>

Si x e y son clases entonces se verifica $x \notin y \vee y \notin x$

En efecto: Si $x \notin U$ o $y \notin U$ trivialmente $(x \notin y) \vee (y \notin x)$. Si en cambio $x \in U$ e $y \in U$ entonces $\{x,y\} \in U \wedge \{x,y\} \neq \emptyset$ luego del axioma de regularidad concluimos

$$[x \cap \{x,y\} = \emptyset] \vee [y \cap \{x,y\} = \emptyset]$$

y puesto que $x \notin x$ e $y \notin y$ deducimos finalmente

$$(x \notin y \vee y \notin x).$$

□

<u>Corolario 2</u>

La clase universal U <u>no</u> es un conjunto.

En efecto: si U fuese un conjunto, entonces, puesto que $U = U$ resultaría $U \in U$, lo que contradice la proposición anterior.

□

<u>Corolario 3</u>

$$U = \{x: x \notin x\}$$

En efecto: será suficiente demostrar $U \subset \{x: x \notin x\}$. Ahora bien, de la proposición anterior deducimos $(\forall y)(y \in U \Rightarrow y \notin y)$ luego $(\forall y)(y \in U \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in \{x: x \notin x\})$

□

Así, pues, hemos demostrado que la clase de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismo como elementos, que habíamos notado inicialmente por R y que acabamos de demostrar coincide con la clase universal U, no es un conjunto; y con lo cual la paradoja de Russell ha sido subsanada en nuestra teoría. Es interesante volver a resaltar el hecho de que hemos demostrado la existencia de una clase propia pero no la existencia de un conjunto, que como hemos dicho anteriormente tendremos que imponerlo como axioma.

□

Nota: Conviene observar que en las proposiciones $(\forall x)(F(x))$ y $(\exists x)(F(x))$ la variable x es no libre, en el sentido de que los valores de dichas proposiciones son independientes de los valores de la variable x. Puesto que la variable "clase" es libre resultará inviable la utilización de cuantificadores sobre clases. No obstante, "interpretaremos" una expresión que contiene una clase variable x de tal manera que es supuestamente verificada "para toda clase x". Así por ejemplo, la expresión "$x \subset x$" la leeremos "para toda clase x se verifica $x \subset x$".

□ □

§2: PRODUCTO CARTESIANO DE CLASES. GRAFICAS

Definición: Si a y b son clases entonces definimos el par ordenado de primera componente a y segunda componente b, que notaremos (a,b), a la clase

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

De esta definición resulta inmediatamente que si las componentes a y b son conjuntos entonces también lo será el par ordenado (a,b); en caso contrario $(a,b) = U$.

Proposición 1

$$(\forall x)(\forall y) \quad (x \in U \wedge y \in U \Rightarrow (x,y) \subset P[P(x \cup y)])$$

Demostración:

Si $x \in U$ entonces $\{x\} \subset P(x) \subset P(x \cup y)$, luego $\{x\} \in P[P(x \cup y)]$. Por otra parte, si $x \in U$ e $y \in U$ entonces $\{x,y\} \subset P(x \cup y)$ y, por tanto, $\{x,y\} \in P[P(x \cup y)]$; es decir

$$(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\} \subset P[P(x \cup y)]$$

□

Proposición 2

Si a y b son conjuntos y c,d son clases, entonces se verifica

$$[(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d]$$

Demostración:

Si $(a,b) = (c,d)$ entonces $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ y, puesto que (a,b) es un conjunto, también lo será (c,d) y, por tanto, sus elementos serán $\{c\}$ y $\{c,d\}$.

Se verificará, pues, que, o bien $\{a\} = \{c\}$ (en cuyo caso $a=c$), o bien $\{a\} = \{c,d\}$ (en cuyo caso $a = c = d$). En ambos casos, concluimos $a = c$.

Por otra parte, el elemento $\{a,b\}$, o bien coincide con $\{c\}$ o con $\{c,d\}$.

Si $\{a,b\} = \{c\}$ entonces $a = b = c$, por tanto $(a,b) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\}\}$ y, puesto que $(a,b) = (c,d)$ deducimos $\{c,d\} = \{a\}$, es decir $a = b = c = d$.

Si $\{a,b\} = \{c,d\}$ entonces, teniendo presente que $a = c$ resulta $b = d$; en efecto: si $a = b$ entonces $c = d = a = b$, y si, en cambio $a \neq b$, entonces $d \neq a$ y $d \in \{a,b\}$ luego $d = b$.

La implicación recíproca es trivial.

□

El concepto de par ordenado puede generalizarse de manera natural a ternas ordenadas, cuaternas ordenadas, etc., verificándose la propiedad anterior cuando las componentes son conjuntos. Así por ejemplo, si a,b y c son clases entonces definimos la terna ordenada de primera componente a, segunda componente b, y tercera componente c, que notaremos (a,b,c), a la clase

$$(a,b,c) = (a,(b,c))$$

De las propiedades de los pares ordenados y de la anterior definición, deducimos, inmediatamente, que si a, b y c son conjuntos entonces (a,b,c) es un conjunto; y, en caso contrario, $(a,b,c) = \mathcal{U}$. Además, si a,b y c son conjuntos y e,f,g son clases, entonces se verifica

$$[(a,b,c) = (e,f,g)] \Leftrightarrow [a = e \wedge b = f \wedge c = g]$$

Definición: Si a y b son clases entonces definimos la clase producto cartesiano de a y b, que notaremos $a \times b$, a la clase

$$a \times b = \{x: (\exists y)(\exists z)\ (y \in a \wedge z \in b \wedge x = (y,z))\}$$

Proposición 3

Si $a \in \mathcal{U}$ y $b \in \mathcal{U}$ entonces $a \times b \subset P[P(a \cup b)]$

Demostración:

Si $(x,y) \in a \times b$ entonces $x \in a$ e $y \in b$; por tanto $\{x\} \in P(a) \subset P(a \cup b)$ y $\{x,y\} \in P(a \cup b)$; de donde resulta $\{\{x\},\{x,y\}\} \subset P(a \cup b)$, es decir $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \in P[P(a \cup b)]$

□

De esta proposición deducimos, pues, que el producto cartesiano de conjuntos es un conjunto.

Proposición 4

Si a y b son clases, entonces se verifica:

$$(a \times b \neq \emptyset) \Leftrightarrow (a \neq \emptyset \wedge b \neq \emptyset)$$

Demostración:

Basta tener presente que $a \times b \neq \emptyset$ sí y sólo sí existe, al menos, un elemento x de la clase $a \times b$, lo cual es equivalente a la existencia de elementos y, de la clase a, y z, de la clase b, tales que $x = (y,z)$.

□

Proposición 5

Si a,b,c,d, $(c \neq \emptyset \wedge d \neq \emptyset)$ son clases entonces se verifica

$$[c \times d \subset a \times b] \Leftrightarrow [c \subset a \wedge d \subset b]$$

Demostración:

Si $x \in c$ e $y \in d$ entonces $(x,y) \in c \times d \subset a \times b$, luego $(x,y) \in a \times b$, y, por tanto, $x \in a$ e $y \in b$. Recíprocamente, si $(x,y) \in c \times d$ entonces $x \in c \subset a$ e $y \in d \subset b$, luego $x \in a$ e $y \in b$, es decir, $(x,y) \in a \times b$.

□

Proposición 6

Si a, a', b, b' son clases entonces se verifica:

a) $(a \cup a') \times b = (a \times b) \cup (a' \times b)$

b) $(a \cap a') \times b = (a \times b) \cap (a' \times b)$

c) $a \times (b \cup b') = (a \times b) \cup (a \times b')$

d) $a \times (b \cap b') = (a \times b) \cap (a \times b')$

Demostración:

a) Si (x,y) es un par ordenado arbitrario, entonces se verifica:

$$[(x,y) \in (a \cup a') \times b] \Leftrightarrow [x \in a \cup a' \wedge y \in b] \Leftrightarrow [(x \in a \vee x \in a') \wedge (y \in b)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x \in a \wedge y \in b) \vee (x \in a' \wedge y \in b)] \Leftrightarrow [(x,y) \in a \times b \vee (x,y) \in a' \times b] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x,y) \in (a \times b) \cup (a' \times b)]$$

La demostración de los otros apartados es análoga. □

Definición: Una gráfica o relación binaria de la clase a en la clase b es una subclase de $a \times b$.

Trivialmente, la clase $\emptyset$ es una gráfica o relación binaria entre dos clases cualesquiera.

Si G es una gráfica entre dos clases y $(x,y) \in G$ entonces diremos que el elemento y es un homólogo de x por la gráfica G.

Definición: Si G es una gráfica o relación binaria de la clase a en la clase b, entonces definimos el dominio de la gráfica G, que notaremos dom G, y el recorrido de la gráfica G, que notaremos rec G, a las clases siguientes:

$$\text{dom } G = \{x: (\exists y)((x,y) \in G)\}$$
$$\text{rec } G = \{x: (\exists y)((y,x) \in G)\}$$

De esta definición resulta, inmediatamente, que $\text{dom } G \subset a$ y $\text{rec } G \subset b$; además, se verifica $\text{dom } \emptyset = \text{rec } \emptyset = \emptyset$, considerada la clase vacía como una gráfica entre dos clases cualesquiera.

Definición: Una gráfica o relación binaria G de la clase a en la clase b diremos que es funcional sí y sólo sí

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ ((x,y) \in G \wedge (x,z) \in G \Rightarrow y = z)$$

Es decir, la funcionalidad de una gráfica G de a en b viene caracterizada por la condición de que un elemento arbitrario de la clase a posee, a lo sumo, un homólogo en b, por G; o, equivalentemente, que cada elemento del dominio de una gráfica funcional posee un único homólogo por dicha gráfica.

Obsérvese que si G es una gráfica funcional de a en b y $G' \subset G$, entonces la gráfica G' es funcional y, por tanto, la intersección de gráficas funcionales entre dos clases es una gráfica funcional; en cambio, la reunión de gráficas funcionales no es, en general, funcional, como lo prueba el siguiente ejemplo: sean a,b dos conjuntos distintos y consideremos $A = \{a,b\}$. Las gráficas $G = \{(a,a)\}$ y $G' = \{(a,b)\}$ son funcionales en cambio $G \cup G' = \{(a,a),(a,b)\}$ no es funcional.

Definición: Si G es una gráfica de la clase a en la clase b y c es una subclase de a entonces la gráfica $G_{|c} = G \cap (c \times b)$ se denomina gráfica restricción de G a c.

Obviamente, si G es una gráfica funcional de a en b entonces cualquier restricción de G a una subclase c de a será, asímismo, funcional.

Definición: Si a es una clase entonces la diagonal de la clase a, que notaremos Δ_a, es la clase:

$$\Delta_a = \{x: (\exists y)(y \in a \wedge x = (y,y))\}$$

Trivialmente Δ_a es una gráfica funcional de a en a tal que dom Δ_a = rec Δ_a = a.

Composición de gráficas. Gráfica inversa

Definición: Si G es una gráfica de la clase a en la clase b, G' es una gráfica de la clase c en la clase d, y se verifica $b \subset c$, entonces la composición de G y de G' (¡en ese orden!) que notaremos $G' \circ G$, es la clase

$$G' \circ G = \{x: (\exists y)(\exists z)(\exists t)((y,z) \in G \wedge (z,t) \in G' \wedge x = (y,t))\}$$

De la definición anterior resulta inmediatamente que:

i) $G' \circ G$ es una gráfica de la clase a en la clase d

ii) dom $(G' \circ G) \subset$ dom G

iii) rec $(G' \circ G) \subset$ rec G'

Proposición 7 (Funcionalidad de la composición de gráficas)

Si G es una gráfica funcional de la clase a en la clase b y G' es una gráfica funcional de la clase c en la clase d, siendo $b \subset c$, entonces $G' \circ G$ es una gráfica funcional de a en d.

Demostración:

Si $(x,y) \in G' \circ G$ y $(x,y') \in G' \circ G$ entonces existirán elementos $z \in b$ y $z' \in b$ tales que

$$(x,z)\in G \wedge (z,y)\in G' \wedge (x,z')\in G \wedge (z',y')\in G'$$

Puesto que G es funcional y $(x,z)\in G \wedge (x,z')\in G$ deducimos $z=z'$ y, finalmente, de la funcionalidad de G' y de que

$$(z,y)\in G' \wedge (z',y')\in G' \wedge z = z'$$

concluimos que $y=y'$; lo que demuestra la funcionalidad de la gráfica $G'\circ G$.

□

Proposición 8 (Asociatividad de la composición de gráficas)

Si G es una gráfica de la clase a en la clase b, G' es una gráfica de la clase c en la clase d y G'' es una gráfica de la clase e en la clase f, de manera que $b\subset c$ y $d\subset e$, entonces se verifica

$$G''\circ (G'\circ G) = (G''\circ G')\circ G$$

Demostración:

En primer lugar, téngase presente que $G'\circ G$ es una gráfica de a en d, y $G''\circ G'$ es una gráfica de c en f, luego $G''\circ(G'\circ G)$ y $(G''\circ G')\circ G$ son gráficas de a en f.

Para cada par ordenado (x,y) arbitrario resulta

$$[(x,y)\in G''\circ(G'\circ G)] \Leftrightarrow [(\exists z)((z\in d) \wedge (x,z)\in G'\circ G \wedge (z,y)\in G'')] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists z)(\exists t)(z\in d \wedge t\in b \wedge (x,t)\in G \wedge (t,z)\in G' \wedge (z,y)\in G'')] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists t)(t\in b \wedge (x,t)\in G \wedge (t,y)\in G''\circ G')] \Leftrightarrow [(x,y)\in (G''\circ G')\circ G].$$

□

Definición: Si G es una gráfica de la clase a en la clase b entonces la gráfica inversa de G, que notaremos G^{-1}, es la clase

$$G^{-1} = \{x: (\exists y)(\exists z)((y,z) \in G \wedge x = (z,y))\}$$

Es decir, la gráfica G^{-1} se obtiene, a partir de la gráfica G, considerando los pares ordenados de ésta y permutando sus componentes. De la anterior definición resulta, inmediatamente , que si G es una gráfica de a en b entonces G^{-1} es una gráfica de b en a; y que dom G = rec G^{-1} y rec G = dom G^{-1} y $(G^{-1})^{-1} = G$; así como que $\Delta_a^{-1} = \Delta_a$, para cada clase a.

Obsérvese que si bien la composición de gráficas funcionales es una gráfica funcional en cambio la gráfica inversa de una funcional no tiene porqué ser funcional; en efecto, sean a y b dos conjuntos distintos y consideremos $A = \{a,b\}$ $G = \{(a,a),(b,a)\}$, entonces G es una gráfica funcional de A en A y, en cambio, la gráfica inversa $G^{-1} = \{(a,a),(a,b)\}$ no es funcional.

A continuación vamos a estudiar el comportamiento de las gráfi-- cas inversas respecto a la reunión, intersección y composición de gráficas.

Proposición 9

Sean a,b,c,d clases, $G_1 \subset a \times b$ y $G_2 \subset c \times d$; entonces se verifica:

a) $(G_1 \cup G_2)^{-1} = G_1^{-1} \cup G_2^{-1}$

b) $(G_1 \cap G_2)^{-1} = G_1^{-1} \cap G_2^{-1}$

c) Si, además, b = c entonces $(G_2 \circ G_1)^{-1} = G_1 \circ G_2^{-1}$

Demostración:

a) Si (x,y) es un par ordenado arbitrario entonces

$$[(x,y) \in (G_1 \cup G_2)^{-1}] \Leftrightarrow [(y,x) \in G_1 \cup G_2] \Leftrightarrow [(y,x) \in G_1 \vee (y,x) \in G_2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x,y) \in G_1^{-1} \vee (x,y) \in G_2^{-1}] \Leftrightarrow [(x,y) \in G_1^{-1} \cup G_2^{-1}]$$

b) Análogo al apartado a)

c) En primer lugar téngase presente que $G_2 \circ G_1$ es una gráfica de a en d, G_1^{-1} es una gráfica de b en a y G_2^{-1} es una gráfica de d en c, luego $(G_2 \circ G_1)^{-1}$ y $G_1^{-1} \circ G_2^{-1}$ son gráficas de d en a. Si (x,y) es un par ordenado arbitario entonces

$$[(x,y) \in (G_2 \circ G_1)^{-1}] \Leftrightarrow [(y,x) \in G_2 \circ G_1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists z)(z \in b \wedge (y,z) \in G_1 \wedge (z,x) \in G_2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists z)(z \in b \wedge (z,y) \in G_1^{-1} \wedge (x,z) \in G_2^{-1}] \Leftrightarrow [(x,y) \in G_1^{-1} \circ G_2^{-1}]$$

Definición: Una gráfica G de la clase a en la clase b diremos que es inyectiva o unívoca sí y sólo sí

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x,y) \in G \wedge (z,y) \in G \Rightarrow x = z)$$

Con otras palabras, una gráfica G de a en b es inyectiva sí y sólo sí dos elementos distintos cualesquiera de a no pueden poseer un mismo homólogo en b por G. Trivialmente, una gráfica G es inyectiva sí y sólo sí G^{-1} es una gráfica funcional.

Para cada clase a la gráfica Δ_a es inyectiva.

Definición: Una gráfica G de la clase a en la clase b diremos que es epiyectiva o exhaustiva o suprayectiva sí y sólo sí rec G = b.

Es decir, que la epiyectividad de una gráfica G de a en b viene caracterizada por la condición de que cada elemento de b es homólogo de, al menos, un elemento de a por G. Para cada clase a la gráfica Δ_a es epiyectiva.

Definición: Una gráfica G de la clase a en la clase b diremos que es biyectiva o biunívoca sí y sólo sí es, simultáneamente, inyectiva y epiyectiva.

Para cada clase a la gráfica Δ_a es biyectiva.

Proposición 10

Si G es una gráfica inyectiva de la clase a en la clase b y G' es una gráfica inyectiva de la clase c en la clase d, siendo b subclase de c, entonces $G' \circ G$ es una gráfica inyectiva de a en d.

Demostración:

Basta tener presente que una gráfica es inyectiva sí y sólo sí su gráfica inversa es funcional y, además, que la composición de gráficas funcionales es funcional.

□

Proposición 11

Si G es una gráfica epiyectiva de la clase a en la clase b y G' es una gráfica epiyectiva de la clase b en la clase c, entonces $G' \circ G$ es una gráfica epiyectiva de a en c.

Demostración:

Puesto que las gráficas G y G' son epiyectivas se verificará $\text{rec } G = b$ y $\text{rec } G' = c$. Veamos que $\text{rec}(G' \circ G) = c$; en efecto, para cada $x \in c$ existirá un elemento y de b tal que $(y,x) \in G'$; por otra parte, de la epiyectividad de G deducimos la existencia de un elemento z de a tal que $(z,y) \in G$, de donde resulta $(z,x) \in G' \circ G$ es decir, $x \in \text{rec}(G' \circ G)$ y, por tanto, $\text{rec}(G' \circ G) = c$. □

Corolario

Si G es una gráfica biyectiva de la clase a en la clase b y G' es una gráfica biyectiva de la clase b en la clase c entonces $G' \circ G$ es una gráfica biyectiva de la clase a en la clase c.

Trivial. □ □

§3. CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

Definición: Si A y B son conjuntos entonces una correspondencia de A en B es una terna ordenada (G,A,B), donde G es una gráfica o relación binaria de A en B. Puesto que las tres componentes de la terna ordenada que definen una correspondencia son conjuntos, resulta que toda correspondencia entre conjuntos es un conjunto.

Si A es un conjunto, entonces, notaremos I_A a la correspondencia $I_A = (\Delta_A, A, A)$, que denominaremos correspondencia identidad en el conjunto A.

Definición: Si $\mathcal{C} = (G,A,B)$ es una correspondencia de A en B y $A' \subset A$ entonces definimos el conjunto imagen o imagen directa de A' por $\mathcal{C}$, que lo notaremos por $\mathcal{C}(A')$, a la clase (que obviamente es un conjunto):

$$\mathcal{C}(A') = \{x: (\exists y)(y \in A' \wedge (y,x) \in G)\}$$

Si $B' \subset B$ entonces definimos el conjunto antiimagen o imagen inversa de B' por $\mathcal{C}$, que lo notaremos $\mathcal{C}^{-1}(B')$, a la clase (que obviamente es un conjunto):

$$\mathcal{C}^{-1}(B') = \{x: (\exists y)(y \in B' \wedge (x,y) \in G)\}$$

Obsérvese que $\operatorname{dom} G = \mathcal{C}^{-1}(B)$ y $\operatorname{rec} G = \mathcal{C}(A)$.

Definición: Si A,B,C,D son conjuntos tales que $B \subset C$, $\mathcal{C} = (G,A,B)$ es una correspondencia de A en B y $\mathcal{C}' = (G',C,D)$ es una correspondencia de C en D, entonces definimos la correspondencia compuesta de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, que notaremos $\mathcal{C}' \circ \mathcal{C}$, a la correspondencia

$$\mathcal{C}' \circ \mathcal{C} = (G' \circ G, A, D)$$

Trivialmente $\mathcal{C}' \circ \mathcal{C}$ es una correspondencia de A en D, ya que si $G \subset A \times B$ y $G' \subset C \times D$ entonces $G' \circ G \subset A \times D$.

Proposición 1

Si $\mathcal{C} = (G,A,B)$ es una correspondencia del conjunto A en el conjunto B, $\mathcal{C}' = (G',C,D)$ es una correspondencia del conjunto C en el conjunto D y $\mathcal{C}'' = (G'',E,F)$ es una correspondencia del conjunto E en el conjunto F, tales que $B \subset C$ y $D \subset E$, entonces

$$\mathcal{C}'' \circ (\mathcal{C}' \circ \mathcal{C}) = (\mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}') \circ \mathcal{C}$$

Demostración:

Puesto que $\mathcal{C}' \circ \mathcal{C} = (G' \circ G, A, D)$ y $\mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}' = (G'' \circ G', C, F)$ resulta $\mathcal{C}'' \circ (\mathcal{C}' \circ \mathcal{C}) = (G'' \circ (G' \circ G), A, F)$ y $(\mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}') \circ \mathcal{C} = ((G'' \circ G') \circ G, A, F)$. Ahora bien, teniendo presente que todas las componentes de las ternas son conjuntos, éstas son iguales sí y sólo sí coinciden entre sí dichas componentes; de donde deducimos la asociatividad de la composición de correspondencias.

□

Proposición 2

Si $\mathcal{C} = (G,A,B)$ es una correspondencia del conjunto A en el conjunto B y $\mathcal{C}' = (G',C,D)$ es una correspondencia del conjunto C en el conjunto D, tales que $B \subset C$, entonces para cada $A' \subset A$ se verifica

$$(\mathcal{C}' \circ \mathcal{C})(A') = \mathcal{C}'[\mathcal{C}(A')]$$

Demostración:

Si x es un conjunto arbitrario entonces

$$[x \in (\mathcal{C}' \circ \mathcal{C})(A')] \Leftrightarrow [(\exists y)(y \in A' \wedge (y,x) \in G' \circ G)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists y)(\exists z)(y \in A' \wedge z \in B \wedge (y,z) \in G \wedge (z,x) \in G')] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists z)(z \in \mathcal{C}(A') \wedge (z,x) \in G')] \Leftrightarrow [x \in \mathcal{C}'[\mathcal{C}(A')]]$$

□

Definición: Si $\mathcal{C} = (G,A,B)$ es una correspondencia del conjunto A en el conjunto B entonces la correspondencia inversa de $\mathcal{C}$, que notaremos $\mathcal{C}^{-1}$, es

$$\mathcal{C}^{-1} = (G^{-1},B,A)$$

Trivialmente $\mathcal{C}^{-1}$ es una correspondencia del conjunto B en el conjunto A y, además, se verifica

$$I_A^{-1} = I_A$$

Proposición 3

Si $\mathcal{C} = (G,A,B)$ es una correspondencia del conjunto A en el conjunto B y $\mathcal{C}' = (G',B,C)$ es una correspondencia del conjunto B en el conjunto C, entonces se verifica

$$(\mathcal{C}' \circ \mathcal{C})^{-1} = \mathcal{C}^{-1} \circ (\mathcal{C}')^{-1}$$

Demostración:

Basta tener presente que si $G \subset A \times B$ y $G' \subset B \times C$ entonces

$$(G' \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ (G')^{-1}.$$

□

Definición: Diremos que una correspondencia $C = (G,A,B)$ es inyectiva (respectivamente, epiyectiva o biyectiva) sí y sólo sí G es una gráfica inyectiva (respectivamente, epiyectiva o biyectiva).

De las propiedades de las gráficas se deduce, inmediatamente, que la composición de correspondencias inyectivas (respectivamente, epiyectiva o biyectiva) es una correspondencia inyectiva (respectivamente, epiyectiva o biyectiva). La correspondencia identidad en un conjunto es, trivialmente, una correspondencia biyectiva.

□

Proposición 4

Si A y B son conjuntos entonces la clase cuyos elementos son las correspondencias de A en B es un conjunto.

Demostración:

Sea $C = (G,A,B)$ una correspondencia de A en B y recordemos que $(G,A,B) = (G,(A,B))$. Puesto que $(A,B) \subset P(P(A \cup B)$ resulta $(A,B) \in P(P(P(A \cup B)))$. Para simplificar notaremos $C = P(P(P(A \cup B)))$.

Puesto que $G \subset A \times B \subset P(P(A \cup B))$ deducimos $G \in P(P(P(A \cup B))) = C$ y en consecuencia $(G,A,B) = (G,(A,B)) \subset P(C)$; es decir

$$C = (G,A,B) \in P(P(C)) = P(P(P(P(A \cup B))))).$$

Conclusión: la clase cuyos elementos son las correspondencias del conjunto A en el conjunto B es una subclase del conjunto

$$P(P(P(P(A \cup B))))$$

y, por tanto, dicha clase es un conjunto.

□

Aplicaciones entre conjuntos

Definición: Si A y B son conjuntos entonces una aplicación del conjunto A en el conjunto B es una correspondencia (G,A,B) de A en B verificando las condiciones:

i) G es una gráfica funcional de A en B.
ii) dom G = A.

Dicho con otras palabras, una aplicación del conjunto A en el conjunto B es una correspondencia de A en B tal que el conjunto imagen del simplete de un elemento arbitrario de A es el simplete de un cierto elemento de B. En consecuencia, si $f = (G,A,B)$ es una aplicación de A en B entonces para cada $x \in A$ existe un único elemento $y \in B$ tal que $f(\{x\}) = \{y\}$. Esta relación suele expresarse más brevemente (si bien cometiendo un pequeño abuso de lenguaje) así: $f(x) = y$. En tal situación diremos que y es la imagen de x por la aplicación f, o bien que x es una antiimagen de y por f.

Es interesante observar que si $f = (G,A,B)$ y $f' = (G',A,B)$ son aplicaciones establecidas entre los mismos conjuntos A y B entonces $[f = f'] \Leftrightarrow [(\forall x)(x \in A \Rightarrow f(x) = f'(x))]$.

Si la clase vacía $\emptyset$ fuese un conjunto (lo que vendrá impuesto por el axioma del infinito que garantizará la existencia de, al menos, un conjunto) resultaría que para cada conjunto A la terna ordenada $(\emptyset,\emptyset,A)$ sería una aplicación del "conjunto" vacío en el conjunto A. Dicha aplicación la notaremos por el símbolo $\emptyset_A$ y la denominaremos aplicación vacía sobre el conjunto A. Obviamente, para cada conjunto A la correspondencia identidad I_A es una aplicación de A en A.

Si A y B son conjuntos entonces notaremos $F(A;B)$ a la clase (que será un conjunto por la proposición 4) cuyos elementos son las aplicaciones del conjunto A en el conjunto B.

Proposición 5

Si $f = (G,A,B)$ es una aplicación del conjunto A en el conjunto B y $f' = (G',C,D)$ es una aplicación del conjunto C en el conjunto D, tales que $B \subset C$, entonces $f' \circ f = (G' \circ G, A, D)$ es una aplicación del conjunto A en el conjunto D.

Demostración:

En primer lugar tengamos presente que $G' \circ G$ es una gráfica funcional ya que G y G' son funcionales. Por otra parte, si $x \in A$ entonces existe un elemento $y \in B$ tal que $(x,y) \in G$. Puesto que $y \in B \subset C$ y $\text{dom } G' = C$ existirá $z \in D$ verificando $(y,z) \in G'$, luego $x \in \text{dom } G' \circ G$; es decir, $A \subset \text{dom } G' \circ G$ y como, trivialmente, $\text{dom } G' \circ G \subset A$ concluimos que $\text{dom } G' \circ G = A$.

□

Corolario 1

Si A,B,C,D son conjuntos; $f = (G,A,B)$ y $f' = (G',C,D)$ son aplicaciones inyectivas tales que $B \subset C$ entonces $f' \circ f = (G' \circ G, A, D)$ es una aplicación inyectiva.

Corolario 2

Si A,B,C son conjuntos; $f = (G,A,B)$ y $f' = (G',B,C)$ son aplicaciones epiyectivas (respectivamente, biyectivas), entonces $f' \circ f = (G' \circ G, A, C)$ es una aplicación epiyectiva (respectivamente, biyectiva).

□

Restricción y prolongación de una aplicación

Sea $f = (G,A,B)$ una aplicación del conjunto A en el conjunto B. Sea $A' \subset A$ y notemos $f_{|A'} = (G',A',B)$ siendo $G' = G \cap (A' \times B) = G_{|A'}$

Proposición 6

Si A,B son conjuntos; $f = (G,A,B)$ es una aplicación y $A' \subset A$ entonces $f_{|A'}$ es una aplicación de A' en B.

Demostración:

Teniendo presente que $G' = G \cap (A' \times B) \subset G$ y G es funcional, deducimos que G' es una gráfica funcional. Por otra parte, $\text{dom } G' \subset A'$ ya que $G' \subset A' \times B$; además si $x \in A' \subset A$ entonces $x \in A = \text{dom } G$, luego existirá un elemento y de B tal que $(x,y) \in G$, de donde resulta que $(x,y) \in G \cap (A' \times B)$ y, por tanto, $x \in \text{dom } G'$. Conclusión : $\text{dom } G' = A'$.

□

Definición: La aplicación $f_{|A'}$ de A' en B la denominaremos restricción de la aplicación $f = (G,A,B)$ al subconjunto A' de A.

Definición: Si A'' es un conjunto que contiene al conjunto A y $g = (G'',A'',B)$ es una aplicación del conjunto A'' en el conjunto B, entonces diremos que g es una prolongación o extensión de la aplicación $f = (G,A,B)$ a A'' sí y sólo sí $g_{|A} = f$.

Obsérvese que si $f = (G,A,B)$ es una aplicación y $A' \subset A$ entonces existe una única restricción de f a A'; en cambio, si $A'' \supset A$ entonces pueden existir distintas prolongaciones o extensiones de f a A''.

Definición: Si A es un conjunto y $B \subset A$, entonces la aplicación $I_{A|B}$ la denominaremos inyección canónica de B en A.

Trivialmente, la inyección canónica de B en A es una aplicación inyectiva; además, será epiyectiva sí y sólo sí $B=A$.

□

Proposición 7

Si $f = (G,A,B)$ es una aplicación del conjunto A en el conjunto B, entonces son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) f es una aplicación inyectiva.

b) $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

c) G^{-1} es una gráfica funcional.

d) Para cada elemento $x \in B$ el conjunto $f^{-1}(\{x\})$ posee, a lo sumo, un elemento.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b): Trivial, pues la proposición $[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$ es lógicamente equivalente a $[x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$.

b) $\Rightarrow$ c): Si $(x,y) \in G^{-1}$ y $(x,z) \in G^{-1}$ entonces $f(y) = f(z)$, luego $y = z$.

c) $\Rightarrow$ d): Si $y \in f^{-1}(\{x\}) \wedge z \in f^{-1}(\{x\})$ entonces se verificará $(y,x) \in G \wedge (z,x) \in G$, luego $(x,y) \in G^{-1} \wedge (x,z) \in G^{-1}$. Conclusión: $y = z$.

d) $\Rightarrow$ a): Si $f(x) = f(y) = z \in B$ entonces $\{x,y\} \subset f^{-1}(\{z\})$, por tanto $x = y$.

□

Si bien la composición de aplicaciones es una aplicación, en general la correspondencia inversa de una aplicación no es una aplicación, ya que la gráfica inversa de una funcional no tiene porqué ser funcional, y porque el recorrido de la gráfica de una aplicación no coincide, en general, con la tercera componente de la terna ordenada que define dicha aplicación.

A continuación, vamos a establecer una condición necesaria y suficiente para que la correspondencia inversa de una correspondencia sea una aplicación biyectiva.

Proposición 8

Si $f = (G,A,B)$ es una correspondencia del conjunto A en el conjunto B, entonces f es una aplicación biyectiva sí y sólo sí la correspondencia inversa $f^{-1} = (G^{-1},B,A)$ es una aplicación biyectiva.

Demostración:

Si $f = (G,A,B)$ es una aplicación biyectiva entonces $\text{dom } G = A = \text{rec } G^{-1}$ y $\text{rec } G = B = \text{dom } G^{-1}$. Ahora bien, puesto que G es una gráfica funcional e inyectiva resultará que G^{-1} es inyectiva y funcional, por tanto $f^{-1} = (G^{-1},B,A)$ es una aplicación biyectiva.

Recíprocamente si $f^{-1} = (G^{-1},B,A)$ es una aplicación biyectiva, entonces, puesto que $(f^{-1})^{-1} = f$, deducimos que $f = (G,A,B)$ es una aplicación biyectiva.

□

Proposición 9

Si $f = (G,A,B)$ es una aplicación biyectiva del conjunto A en el conjunto B, entonces se verifica:

$$f^{-1} \circ f = I_A \qquad y \qquad f \circ f^{-1} = I_B$$

Demostración:

Si (x,y) es un par ordenado arbitrario entonces

$$[(x,y) \in G^{-1} \circ G] \Rightarrow [(\exists z)(z \in B \wedge (x,z) \in G \wedge (z,y) \in G^{-1})] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\exists z)(z \in B \wedge (x,z) \in G \wedge (y,z) \in G)] \Rightarrow [x = y].$$

Por tanto $G^{-1} \circ G \subset \Delta_A$.

Por otra parte, si $(x,x) \in \Delta_A$ entonces (teniendo presente que $x \in \text{dom } G$) existe $y \in B$ tal que $(x,y) \in G$, es decir que $(y,x) \in G^{-1}$. En consecuencia $(x,x) \in G^{-1} \circ G$ y por tanto $\Delta_A \subset G^{-1} \circ G$.

Finalmente concluimos $G^{-1} \circ G = \Delta_A$ y $f^{-1} \circ f = I_A$.

Análogamente se demuestra que $f \circ f^{-1} = I_B$.

Proposición 10

Sean A,B conjuntos y f una aplicación de A en B. Si C,D son subconjuntos de A y E,G son subconjuntos de B, entonces se verifica:

a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$
b) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$
c) $f^{-1}(E \cup G) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(G)$
d) $f^{-1}(E \cap G) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(G)$

Respecto del apartado b) podemos precisar más aún: f es una aplicación inyectiva de A en B sí y sólo sí para cada C,D subconjuntos de A se verifica $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.

Demostración:

a) Si x es un conjunto arbitrario, entonces

$$[x \in f(C \cup D)] \Leftrightarrow [(\exists y)(y \in C \cup D \wedge x = f(y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists y)((y \in C \vee y \in D) \wedge (x = f(y)))] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [((\exists y)(y \in C \wedge x = f(y))) \vee ((\exists y)(y \in D \wedge x = f(y)))] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in f(C) \vee x \in f(D)] \Leftrightarrow [x \in f(C) \cup f(D)]$$

b) Si x es un conjunto arbitrario, entonces

$$[x \in f(C \cap D)] \Rightarrow [(\exists y)(y \in C \cap D \wedge x = f(y))] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \in f(C) \wedge x \in f(D)] \Rightarrow [x \in f(C) \cap f(D)].$$

Por otra parte, si suponemos $f(C) \cap f(D) = f(C \cap D)$ para cada C,D subconjuntos de A y $x \in A$, $x' \in A$ son tales que $f(x) = f(x')$, entonces considerando $C = \{x\}$ y $D = \{x'\}$ resultará $f(C) =$

$= \{f(x)\} = \{f(x')\} = f(D)$, por tanto $f(C \cap D) \neq \emptyset$. Conclusión: $C \cap D \neq \emptyset$, es decir $x = x'$. Recíprocamente, si suponemos que f es inyectiva y $x \in f(C) \cap f(D)$ entonces existirán elementos $y \in C$ e $y' \in D$ tales que $x = f(y) = f(y')$, por tanto $y = y'$; es decir $x \in f(C \cap D)$.

c) Si x es un conjunto arbitrario entonces

$$[x \in f^{-1}(E \cup G)] \Leftrightarrow [f(x) \in E \cup G] \Leftrightarrow [f(x) \in E \vee f(x) \in G] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(E) \vee x \in f^{-1}(G)] \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(G)]$$

d) Si x es un conjunto arbitrario entonces

$$[x \in f^{-1}(E \cap G)] \Leftrightarrow [f(x) \in E \cap G] \Leftrightarrow [f(x) \in E \wedge f(x) \in G] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(E) \wedge x \in f^{-1}(G)] \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(G)]$$

□

Proposición 11

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B, A' es un subconjunto de A y B' es un subconjunto de B, entonces se verifica:

a) $A' \subset f^{-1}(f(A'))$
b) $B' \supset f(f^{-1}(B'))$

Demostración:

a) Si $x \in A'$ entonces $f(x) \in f(A')$ y, por tanto, $x \in f^{-1}(f(A'))$.

b) Si $x \in f(f^{-1}(B'))$ entonces existe un elemento $y \in f^{-1}(B')$ tal que $x = f(y) \in B'$.

□

Proposición 12

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B entonces, f es inyectiva sí y sólo sí para cada $A' \subset A$ se verifica $A' = f^{-1}(f(A'))$.

Demostración:

Supongamos que la aplicación f sea inyectiva, $A' \subset A$ y $x \in f^{-1}(f(A'))$. Puesto que $f(x) \in f(A')$ existirá un elemento $y \in A'$ tal que $f(x) = f(y)$, luego $x = y \in A'$. Por tanto $f^{-1}(f(A')) \subset A'$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $A' \subset A$ se verifique $A' = f^{-1}(f(A'))$ y sean $x \in A$, $y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces resultará

$$\{x\} = f^{-1}(f\{x\})) = f^{-1}(f\{y\})) = \{y\}$$

de donde deducimos $x=y$, lo que demuestra la inyectividad de la aplicación f.

□

Proposición 13

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B entonces, f es epiyectiva sí y sólo sí para cada $B' \subset B$ se verifica $B' = f(f^{-1}(B'))$.

Demostración:

Supongamos que la aplicación f sea epiyectiva, $B' \subset B$ y $x \in B'$. Puesto que $x \in B = f(A)$ existirá un elemento $y \in A$ tal que $x = f(y)$. Ahora bien, $y \in f^{-1}(B')$ y $x = f(y)$, por tanto $x \in f(f^{-1}(B'))$. Es decir, $B' \subset f(f^{-1}(B'))$. En consecuencia $B' = f(f^{-1}(B'))$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $B' \subset B$ se verifique $B' = f(f^{-1}(B'))$ y sea $x \in B$. En tal situación $\{x\} \subset B$, por tanto $\{x\} = f(f^{-1}(\{x\}))$ y puesto que $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$ resultará $x \in f(A)$, es decir $f(A) = B$: lo que demuestra la epiyectividad de la aplicación f.

□ □

§4. RETRACCIONES Y SECCIONES

Definición: Sea f una aplicación del conjunto A en el conjunto B y g una aplicación de B en A. En tal situación diremos que g es una retracción de f sí y sólo sí $g \circ f = I_A$; y diremos que g es una sección de f sí y sólo sí $f \circ g = I_B$.

Es decir, g es una sección de f sí y sólo sí f es una retracción de g.

Si f es una aplicación biyectiva, entonces f^{-1} es una retracción y una sección de f.

Proposición 1

Sean A,B,C,D conjuntos tales que $B \subset C$. Sea f una aplicación de A en B y g una aplicación de C en D. En tal situación, si $g \circ f$ es inyectiva entonces la aplicación f es inyectiva.

Demostración:

Sean x e y elementos del conjunto A tales que $f(x) = f(y)$. Entonces $g[f(x)] = g[f(y)]$, luego $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ y, por tanto $x = y$.

□

Corolario 1

Si una aplicación f posee, al menos, una retracción entonces f es inyectiva.

En efecto: Basta tener presente que si g es una retracción entonces $g \circ f$ es inyectiva. □

Corolario 2

Toda sección es una aplicación inyectiva.

En efecto: Basta tener presente que si g es una sección de la aplicación f entonces $f \circ g$ es inyectiva.

□

Proposición 2

Sean A,B,C,D conjuntos tales que $B \subset C$. Sea f una aplicación de A en B y g una aplicación de C en D. En tal situación, si $g \circ f$ es epiyectiva entonces la aplicación g es epiyectiva.

Demostración:

Si x es un elemento arbitrario de D entonces existe un elemento $y \in A$ tal que $(g \circ f)(y) = x$, es decir $g[f(y)] = x$. Luego $f(y) \in B \subset C$ es una antiimagen de x por g, por tanto la aplicación g es epiyectiva.

□

Corolario 1

Si una aplicación posee, al menos, una sección entonces dicha aplicación es epiyectiva.

En efecto: Basta tener presente que si g es una sección de la aplicación f entonces $f \circ g$ es epiyectiva.

□

Corolario 2

Toda retracción es una aplicación epiyectiva.

En efecto: Basta tener presente que si g es una retracción de la aplicación f entonces $g \circ f$ es epiyectiva. □

Corolario 3

Sean A,B,C,D conjuntos tales que $B \subset C$. Sea f una aplicación de A en B y g una aplicación de C en D. En tal situación, si $g \circ f$ es biyectiva entonces f es inyectiva y g es epiyectiva. Trivial.

□

Corolario 4

Sea f una aplicación del conjunto A en el conjunto B y g una aplicación de B en A tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$. En tal situación f y g son aplicaciones biyectivas y, además, $f = g^{-1}$.

En efecto: Puesto que las aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son biyectivas deducimos, del corolario anterior, la biyectividad de f y de g.

Además se verifica

$$g^{-1} = g^{-1} \circ I_A = g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = I_B \circ f = f$$

□

Corolario 5

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B entonces, f es biyectiva sí y sólo sí existe una única aplicación g de B en A tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.

En efecto: Si la aplicación f es biyectiva entonces basta tomar $g = f^{-1}$. La unicidad de g se deduce del corolario anterior.

La implicación recíproca es trivial.

□

Teorema 1

Sean A,B,C conjuntos tales que $A \neq \emptyset$. Sea f una aplicación

de A en B y g una aplicación de A en C. En tal situación, son equivalentes las proposiciones:

a) Existe una aplicación h de B en C tal que $h \circ f = g$.

b) $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y))$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b): Si existe una aplicación h de B en C tal que $h \circ f = g$, y $x \in A$ e $y \in A$ verifican $f(x) = f(y)$, entonces

$$h[f(x)] = h[f(y)] .$$

Es decir $(h \circ f)(x) = (h \circ f)(y)$, luego $g(x) = g(y)$.

b) $\Rightarrow$ a): Consideremos el conjunto

$$\bar{G} = \{(x,y) : (\exists z)(z \in A \wedge x = f(z) \wedge y = g(z))\}$$

De la definición de $\bar{G}$ deducimos

$$\bar{G} \subset f(A) \times g(A) \subset f(A) \times C$$

Además $\bar{G} \neq \emptyset$ ya que, para cada $x \in A$ se verifica $(f(x), g(x)) \in \bar{G}$.

Sea entonces $\bar{h} = (\bar{G}, f(A), C)$.

Lema

$\bar{h}$ es una aplicación de $f(A)$ en C.

En efecto: $\bar{G}$ es funcional, pues si $(x,y) \in \bar{G}$ y $(x,z) \in \bar{G}$ entonces existen elementos $t \in A$ y $t' \in A$ tales que

$$x = f(t) \wedge y = g(t) \wedge x = f(t') \wedge z = g(t')$$

y de la condición b) deducimos $y = z$.

Veamos que $\operatorname{dom} \bar{G} = f(A)$.

Si $x \in f(A)$ entonces existe $y \in A$ tal que $x = f(y)$, luego $(f(y), g(y)) \in \bar{G}$ y, por tanto, $x \in \operatorname{dom} \bar{G}$. □

Pretendemos, a continuación, definir una aplicación h de B en C que sea una prolongación de $\bar{h}$ a B. Si $a \in C$ (obsérvese que por ser $A \neq \emptyset$ y g una aplicación de A en C,

resultará $C \neq \emptyset$) y notamos

$$G' = \{(x,a): \ x \in B - f(A)\} \quad \text{y} \quad G = \bar{G} \cup G'$$

entonces consideramos $h = (G,B,C)$.

Lema

h es una aplicación de B en C

En efecto: G es una gráfica funcional por ser unión de gráficas funcionales cuyos dominios son disjuntos.

Por otra parte, si $x \in B$ entonces, o bien $x \in f(A)$ en cuyo caso $x \in \text{dom } \bar{G}$, o bien $x \notin f(A)$ en cuyo caso $x \in B - f(A) \subset$ $\subset \text{dom } G'$; en ambos casos $x \in \text{dom } G$. Conclusión: $\text{dom } G = B$.

□

Falta, pues, demostrar que $h \circ f = g$.

Si $x \in A$ entonces $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = \bar{h}[f(x)] = g(x)$: lo que completa la demostración. □

Corolario

Si A y B son conjuntos ($A \neq \emptyset$) y f es una aplicación de A en B entonces, f es inyectiva sí y sólo sí f posee, al menos, una retracción.

En efecto: Basta aplicar la proposición anterior considerando $g = I_A$.

□

Obsérvese que el corolario anterior no es válido para el caso $A = \emptyset$ ya que la aplicación $\emptyset_{\{a\}} = (\emptyset,\emptyset,\{a\})$, siendo a un conjunto, es inyectiva y, en cambio, no existe ninguna aplicación de $\{a\}$ en $\emptyset$.

Dicha consideración la hacemos bajo el supuesto de que la clase vacía sea un conjunto.

A continuación, introduciremos un nuevo axioma en la teoría de clases, que nos va a permitir completar el estudio de las retracciones y secciones de aplicaciones.

□

AXIOMA VI (de la elección)

Para cada conjunto A existe, al menos, una aplicación φ de $P(A) - \{\emptyset\}$ en A tal que, para cada $B \in P(A) - \{\emptyset\}$ se verifica $\varphi(B) \in B$.

De acuerdo con la nomenclatura del axioma de la elección, la aplicación φ recibe el nombre de una función de elección sobre A y para cada $B \in P(A) - \{\emptyset\}$ el elemento $\varphi(B)$ recibe el nombre de elemento distinguido de B por la función de elección φ.

A nivel meramente intuitivo, por el axioma de la elección dado un conjunto A podemos disponer de una "ley o criterio de selección" (una función de elección) que permita "elegir" un elemento de cada subconjunto no vacío de A (su elemento distinguido por dicha función de elección).

El axioma de la elección es utilizado de forma inconsciente a lo largo del siglo XIX por la mayoría de los matemáticos (Cantor incluido) quizás por considerar intuitivamente evidente el proceso de selección que proporciona una función de elección. Las primeras referencias explícitas se encuentran en Peano (1890) y B. Leví (1902); no obstante es Zermelo en 1904 quien formula explícitamente dicho axioma al necesitarlo en la demostración de su teorema de la buena ordenación y no considerarlo "matemáticamente evidente".

El axioma de la elección provocó duras y fuertes controversias, ocasionadas básicamente por las diferentes toma de postura ante el sig

nificado matemático del término "existencia" (mientras para unos -logicistas y formalistas- es lícito la utilización de un axioma expresado en términos de existencia siempre y cuando no dé lugar a contradicción, para otros -intuicionistas- la existencia de un conjunto únicamente puede asegurarse, bien si cada uno de sus elementos pueden ser "designados" explícitamente o si, en su defecto, se dispone de una "ley" que permita "construir" todos sus elementos).

Así el axioma de la elección es admitido sin reserva por formalistas y logicistas (Hilbert, Peano, Hadamard, Russell,...) siendo rechazado de plano por los intuicionistas (Brouwer, Lebesgue, Lusín, Borel...) por considerarlo carente de sentido ya que, para ellos, las ideas matemáticas ya están implícitas en la vida cotidiana, admitiendo únicamente conceptos en los que se indique el procedimiento para "construirlos". Como hace notar Janieszewski, otro intuicionista, ellos no niegan el axioma de la elección, simplemente afirman que es incomprensible.

En 1938 Godel demostró la compatibilidad de dicho axioma con los restantes de la teoría y, posteriormente, en 1963 P. Cohen demostraría su independencia.

Más adelante, estudiaremos las dos caracterizaciones más usuales del axioma de la elección: el lema de Zorn y el teorema de la buena ordenación de Zermelo.

Teorema 2

Sean A,B,C conjuntos. Sea f una aplicación de A en B y g una aplicación de C en B. En tal situación: son equivalentes las proposiciones:

a) Existe una aplicación h de C en A tal que $f \circ h = g$
b) $g(C) \subset f(A)$.

Demostración:

Si $A=\emptyset$ y existe una aplicación h de C en A tal que $f\circ h = g$ entonces $C=\emptyset$ y, por tanto, $g(C)\subset f(A)$.

Recíprocamente, si $A=\emptyset$ y $g(C)\subset f(A)$ entonces $C=\emptyset$, en tal caso la aplicación $\emptyset_{\emptyset} = h = (\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ verifica $f\circ h = g$. Supongamos, pues, $A\neq\emptyset$.

a) $\Rightarrow$ b): Si existe una aplicación h de C en A tal que $f\circ h = g$, entonces, para cada $x\in g(C)$ existe $y\in C$ tal que $x = g(y) = (f\circ h)(y) = f[h(y)]$, luego $x\in f(A)$.

b) $\Rightarrow$ a): Supongamos ahora que $g(C)\subset f(A)$ y consideremos una función de elección φ del conjunto A.

Si $x\in C$ entonces $g(x)\in g(C)\subset f(A)$, luego $f^{-1}(\{g(x)\})\neq\emptyset$.

Sea $G = \{(x,y): (x\in C \wedge y=\varphi[f^{-1}(\{g(x)\})])\}$

Puesto que $\varphi[f^{-1}(\{g(x)\})]\in f^{-1}(\{g(x)\})$ resulta $\varphi[f^{-1}(\{g(x)\})]\in A$ y, por tanto $G\subset C\times A$. Veamos que G es una gráfica funcional.

Si $(x,y)\in G$ y $(x,z)\in G$ entonces

$$y = \varphi[f^{-1}(\{g(x)\})] \wedge z = \varphi[f^{-1}(\{g(x)\})]$$

luego $y=z$. Además si $x\in C$ entonces $g(x)\in g(C)\subset f(A)$, es decir $f^{-1}[\{g(x)\}]\neq\emptyset$. Luego existe $y\in A$ tal que $y = \varphi[f^{-1}(\{g(x)\})]$, de donde deducimos que $x\in$ dom G y, por tanto, dom $G = C$.

En consecuencia, la terna ordenada $h = (G,C,A)$ es una aplicación y verifica, para cada elemento $x\in C$:

$$(f\circ h)(x) = f[h(x)] = f[\varphi(f^{-1}(\{g(x)\}))] = g(x)$$

Es decir: $f\circ h = g$, lo que completa la demostración.

□

Corolario

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B en-

tonces, f es epiyectiva sí y sólo sí posee, al menos, una sección.

En efecto: Basta aplicar el teorema anterior considerando $g = I_B$.

□

Teorema 3

Si A,B son conjuntos $(A \neq \emptyset)$ y f es una aplicación de A en B entonces, f es inyectiva sí y sólo sí para cada conjunto C, no vacío, y para cada par de aplicaciones g y h de C en A, tales que $f \circ g = f \circ h$, se verifica $g = h$.

Demostración:

Supongamos que la aplicación f es inyectiva y sea k una re-- tracción de f. En tal situación, si g y h son aplicaciones de un cierto conjunto no vacío C en A, tales que $f \circ g = f \circ h$, se verifi cará:

$$k \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ h), \quad \text{es decir,} \quad (k \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ h$$

Luego $g = h$.

Recíprocamente, si f no es inyectiva entonces existirán elemen tos $x \in A$ e $y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$ y $x \neq y$. Consideremos $C = \{x,y\}$ y sean: g la aplicación de C en A definida por $g(x) = g(y) = x$ y h la aplicación de C en A definida por $h(x) = h(y) = y$. En tal situación, se verifica trivialmente que $f \circ g = f \circ h$ y, en cambio, $g \neq h$.

□

Teorema 4

Si A,B son conjuntos $(A \neq \emptyset)$ y f es una aplicación de A en B entonces, f es epiyectiva sí y sólo sí para cada conjunto C, no vacío, y para cada par de aplicaciones g y h de B en C tales que $g \circ f = h \circ f$, se verifica $g = h$.

Demostración:

Sea f una aplicación epiyectiva y k una sección de f. En tal situación, si g y h son aplicaciones de B en un cierto conjunto C, tales que $g \circ f = h \circ f$, se verificará:

$$(g \circ f) \circ k = (h \circ f) \circ k, \quad \text{es decir,} \quad g \circ (f \circ k) = h \circ (f \circ k)$$

Luego $g = h$.

Recíprocamente, si B posee un elemento (obsérvese que $B \neq \emptyset$, por serlo A) entonces f es epiyectiva; en caso contrario, sean a y b elementos distintos del conjunto B y consideramos las aplicaciones g y h de B en B definidas así:

$$g(x) = x \quad \text{si} \quad x \in f(A) \quad \text{y} \quad g(x) = a \quad \text{si} \quad x \in B - f(A)$$
$$h(x) = x \quad \text{si} \quad x \in f(A) \quad \text{y} \quad h(x) = b \quad \text{si} \quad x \in B - f(A)$$

En tal situación, resultaría que para cada elemento $x \in A$:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = f(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Luego $g \circ f = h \circ f$ y, por tanto, $g = h$. En consecuencia $B - f(A) = \emptyset$, es decir $f(A) = B$: lo que demuestra la epiyectividad de la aplicación f.

□

De los teoremas anteriores deducimos que la inyectividad de una aplicación entre conjuntos no vacíos, está caracterizada por la validez de la ley de simplificación a la izquierda; y la epiyectividad por la validez de la ley de simplificación a la derecha.

□ □

§5. FAMILIAS Y SISTEMAS DE CONJUNTOS

La necesidad de generalizar algunos conceptos definidos para dos conjuntos (tales como la reunión, intersección y producto cartesiano entre otros) a un "número arbitrario de conjuntos" o a una "serie de conjuntos dados", obliga a buscar una definición correcta que traduzca fielmente y con todo rigor la idea intuitiva de "dar una serie de conjuntos". Para ello habremos de asociar a cada elemento i de una clase I no vacía (o de un conjunto I no vacío) un único conjunto A_i mediante un "determinado criterio" (lo que se conseguirá a partir de una cierta gráfica funcional). Así surgirá el concepto de familia como una gráfica funcional (en el caso en que I sea una clase no vacía) o una aplicación (en el caso en que I sea un conjunto no vacío), y en donde la "serie de conjuntos A_i que nos proporciona dicha familia" será el objetivo central de nuestro estudio, más aún que la propia familia considerada como gráfica funcional o aplicación, según el caso.

Definición: Una familia de conjuntos sobre una clase A con clase de índices I ($I \neq \emptyset$) es una gráfica funcional G de la clase I en la clase A tal que $\operatorname{dom} G = I$. Los elementos de la clase I reciben el nombre de índices de la familia. Para cada $i \in I$ notaremos por A_i el homólogo de i por G y los conjuntos A_i ($\forall i \in I$) reciben el nombre de conjuntos de la familia G, a la cual "representaremos"por $\{A_i\}_{i \in I}$.

Definición: Una familia de conjuntos con conjunto de índices I ($I \neq \emptyset$) es una aplicación f del conjunto I en un cierto conjunto A. En tal situación, diremos asímismo que f es una "familia de elementos del conjunto A con conjunto de índices I". Los elementos del conjunto I reciben el nombre de índices de la familia. Para cada

$i \in I$ notaremos $f(i) = A_i$ y los conjuntos A_i $(\forall i \in I)$ reciben el nombre de conjuntos de la familia f, a la cual "representaremos" por $\{A_i\}_{i \in I}$.

Obsérvese que si I es un conjunto no vacío y A es un conjunto entonces una terna ordenada $f = (G,I,A)$ es una familia de conjuntos con conjunto de índices I sí y sólo sí G es una familia de conjuntos sobre A con conjunto de índices I; ello justifica que en tales situaciones identifiquemos f con G, es decir los conceptos de "familia de conjuntos sobre A con conjunto de índices I" y "familia de conjuntos con conjunto de índices I".

Definición: Una familia de partes de un conjunto A con conjunto de índices I $(I \neq \emptyset)$ es una familia de elementos de $P(A)$ con conjunto de índices I; es decir, es una aplicación de I en $P(A)$.

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de un conjunto A entonces la clase $\{x: (\exists i)(i \in I \wedge x = A_i)\}$, que es un conjunto por ser subclase de A, recibe el nombre de sistema asociado a dicha familia. Obsérvese que el sistema asociado a una familia de elementos de un conjunto A es un conjunto no vacío cuyos elementos son, precisamente, los conjuntos de la familia.

De esta forma asignamos a cada familia de elementos de un conjunto, un cierto conjunto no vacío (el sistema asociado a la familia); pues bien, el siguiente axioma de la teoría de clases nos va a permitir resolver la cuestión inversa, es decir, asociar a cada conjunto no vacío A una cierta familia de elementos de un conjunto tal que su sistema asociado sea, precisamente, A.

□

AXIOMA VII (de amalgamación)

Si A es un conjunto entonces la clase $\bigcup A$ es un conjunto.

Proposición 1

Si A es un conjunto no vacío, entonces existe una familia de elementos de un cierto conjunto tal que su sistema asociado es A.

Demostración:

Puesto que A es un conjunto resulta por el axioma de amalgamación que la clase $B = \bigcup A$ es un conjunto; además $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \subset \bigcup A = B)$ luego $A \subset P(B)$. En tal situación, la inyección canónica $I_{P(B)}|_A$ de A en $P(B)$ es una familia de partes de B con conjunto de índices A y tal que su sistema asociado es $\{x : (\exists i)(i \in A \wedge x = I_{P(B)}|_A (i) = i)\} = A$.

□

Unión e intersección de conjuntos de una familia

Definición: Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos sobre una clase A con clase de índices I $(I \neq \emptyset)$ (en particular por la identificación considerada, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos con conjunto de índices $I \neq \emptyset$) entonces la clase intersección de los conjuntos de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$, que notaremos $\bigcap_{i \in I} A_i$, es por definición la clase

$$\{x : (\forall i)\ (i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

y la clase reunión o unión de los conjuntos de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$, que notaremos $\bigcup_{i \in I} A_i$, es por definición la clase

$$\{x : (\exists i)\ (i \in I \wedge x \in A_i)\}$$

De las anteriores definiciones resultan inmediatamente las consideraciones siguientes:

1.- La clase $\bigcap_{i \in I} A_i$ coincide con la clase intersección de los elementos del sistema asociado a la familia $\{A_i\}_{i \in I}$.

2.- La clase $\bigcup_{i\in I} A_i$ coincide con la clase reunión de los elementos del sistema asociado a la familia $\{A_i\}_{i\in I}$.

3.- La clase $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto ya que por ser $I \neq \emptyset$ existirá $j \in I$ y, por tanto, $\bigcap_{i\in I} A_i$ es subclase del conjunto A_j.

4.- De momento no podemos asegurar nada acerca de si la clase $\bigcup_{i\in I} A_i$ es o no un conjunto. Más aún, si I es una clase propia entonces la clase $\bigcup_{i\in I} A_i$ puede no ser conjunto, como lo prueba el siguiente ejemplo: sea $I = U$ y $G = \Delta_U$, entonces

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x: (\exists i)(i\in I \wedge x\in A_i = i)\} = \{x: (\exists i)(i\in U \wedge x\in i)\} = \bigcup U =$$
$$= U.$$

Por tanto, para que podamos asegurar en general que la clase $\bigcup_{i\in I} A_i$ sea conjunto es condición necesaria que I sea un conjunto no vacío. ¿Será suficiente dicha condición?. El siguiente axioma de la teoría de clases nos permitirá responder afirmativamente; más aún, nos permitirá establecer que los conjuntos de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ coinciden con los conjuntos de una cierta familia de partes con conjunto de índices I. □

AXIOMA VIII (de sustitución)

Si G es una gráfica funcional entre dos clases y dom G es un conjunto, entonces rec G es un conjunto.

Proposición 2

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos sobre una clase con conjunto de índices I $(I \neq \emptyset)$ entonces existe un conjunto A tal que los conjuntos de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ coinciden con los conjuntos de

una cierta familia de partes de A con conjunto de índices I.

Demostración:

Sea G la familia de conjuntos sobre una clase con conjunto de índices $I \neq \emptyset$ "representada" por $\{A_i\}_{i\in I}$. Puesto que G es una gráfica funcional y $\operatorname{dom} G = I \in U$ resulta del axioma de sustitución que $\operatorname{rec} G$ es un conjunto; por tanto, del axioma de amalgamación deducimos que la clase $A = \bigcup \operatorname{rec} G$ es un conjunto. Por otra parte, se verifica $(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i \in \operatorname{rec} G \Rightarrow A_i \subset \bigcup \operatorname{rec} G = A \Rightarrow A_i \in P(A))$, luego la terna ordenada $(G,I,P(A))$ es una familia de partes de A con conjunto de índices I y tal que los conjuntos de dicha familia coinciden con los de la familia G "representada" por $\{A_i\}_{i\in I}$.

□

Corolario

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos sobre una clase con conjunto de índices I $(I \neq \emptyset)$, entonces la clase $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto.

En efecto: utilizando la nomenclatura de la proposición anterior resultará que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es una subclase del conjunto $A = \bigcup \operatorname{rec} G$, luego $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto. Más aún, podemos asegurar que $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ ya que si $x \in A = \bigcup \operatorname{rec} G$ entonces $(\exists i)(i \in I \wedge x \in A_i)$, luego $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

□

Obsérvese que de la proposición 2 resulta lo siguiente: toda familia de conjuntos sobre una clase con conjunto de índices $I \neq \emptyset$ puede considerarse (si bien formalmente no es igual) como una familia de elementos de un conjunto con conjunto de índices $I \neq \emptyset$. En adelante, siempre que hablemos de una "familia de conjuntos" sobreentenderemos que nos estamos refiriendo a una "familia de elementos de un conjunto

con conjunto de índices $I \neq \emptyset$" o bien por la observación anterior, y a menos de esa imprecisión formal, a una "familia de conjuntos sobre una clase con conjunto de índices $I \neq \emptyset$".

A continuación, vamos a estudiar algunas propiedades interesantes relacionadas con las familias de conjuntos.

Proposición 3

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos y B es un conjunto, entonces se verifica:

a) $[B \subset \bigcap_{i\in I} A_i] \Leftrightarrow [(\forall i)(i \in I \Rightarrow B \subset A_i)]$

b) $[B \supset \bigcup_{i\in I} A_i] \Leftrightarrow [(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i \subset B)]$

Demostración:

a) Si $B \subset \bigcap_{i\in I} A_i$ e $i \in I$ entonces se verifica $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A_i)$ luego $B \subset A_i$.

Recíprocamente, si $(\forall i)(i \in I \Rightarrow B \subset A_i)$ entonces $(\forall i)\ (\forall x)\ ((i \in I \wedge x \in B) \Rightarrow (x \in A_i))$, luego $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i)$. Conclusión: $B \subset \bigcap_{i\in I} A_i$.

b) Si $B \supset \bigcup_{i\in I} A_i$ entonces $(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i \subset B)$.

Recíprocamente, si $(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i \subset B)$ entonces $(\forall x)(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow$ $\Rightarrow (\exists i)(i \in I \wedge x \in A_i))$, luego $(\forall x)(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in B)$; es decir, $\bigcup_{i\in I} A_i \subset B$.

□

La siguiente proposición, generaliza a familias de conjuntos la propiedad asociativa de la intersección y reunión de conjuntos.

Proposición 4

Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{I_j\}_{j\in J}$ familias de conjuntos tales que $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ y $(\forall j)(j\in J \Rightarrow I_j\neq\emptyset)$. En tal situación se verifica:

a) $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J} [\bigcap_{i\in I_j} A_i]$

b) $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} [\bigcup_{i\in I_j} A_i]$

Demostración:

a) Si x es un conjunto arbitrario entonces

$$[x\in \bigcap_{i\in I} A_i] \Leftrightarrow [(\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in A_i)]$$

Ahora bien, teniendo presente que $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ deducimos

$$[x\in \bigcap_{i\in I} A_i] \Leftrightarrow [(\forall i)(\forall j)(j\in J \wedge i\in I_j \Rightarrow x\in A_i)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\forall j)(j\in J \Rightarrow x\in \bigcap_{i\in I_j} A_i)] \Leftrightarrow [x\in \bigcap_{j\in J} (\bigcap_{i\in I_j} A_i)]$$

b) Si x es un conjunto arbitrario entonces

$$[x\in \bigcup_{i\in I} A_i] \Leftrightarrow [(\exists i)(i\in I \wedge x\in A_i)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists i)(\exists j)(j\in J \wedge i\in I_j \wedge x\in A_i)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists j)(j\in J \wedge x\in \bigcup_{i\in I_j} A_i)] \Leftrightarrow [x\in \bigcup_{j\in J} (\bigcup_{i\in I_j} A_i)]$$

□

Proposición 5

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos y B es un conjunto, entonces se verifica:

a) $B \cap (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (B \cap A_i)$

b) $B \cup (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (B \cup A_i)$

c) $B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$

d) $B \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)$

e) $B - (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (B - A_i)$

f) $B - (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (B - A_i)$

g) $B \times (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (B \times A_i)$

h) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times B = \bigcup_{i\in I} (A_i \times B)$

i) $B \times (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (B \times A_i)$

j) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times B = \bigcap_{i\in I} (A_i \times B)$

Demostración:

a) Si x es un conjunto arbitrario entonces se verifica:

$$[x\in B \cap (\bigcap_{i\in I} A_i)] \Leftrightarrow [x\in B \wedge x\in \bigcap_{i\in I} A_i] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in B \wedge x\in A_i)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in B\cap A_i)] \Leftrightarrow [x\in \bigcap_{i\in I} (B\cap A_i)]$$

b) La demostración es análoga a la del apartado a).

c) Si x es un conjunto arbitrario entonces se verifica:

$$[x\in B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)]\Leftrightarrow[x\in B\wedge x\in\bigcup_{i\in I}A_i]\Leftrightarrow[(x\in B)\wedge(\exists i)(i\in I\wedge x\in A_i)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(\exists i)(i\in I\wedge x\in B\wedge x\in A_i]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(\exists i)(i\in I\wedge x\in B\cap A_i)]\Leftrightarrow[x\in\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)].$$

d) La demostración es análoga a la del apartado c).

e) Si x es un conjunto arbitrario entonces se verifica:

$$[x\in B-(\bigcap_{i\in I}A_i)]\Leftrightarrow[x\in B\wedge x\notin\bigcap_{i\in I}A_i]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(x\in B)\wedge(\exists i)(i\in I\wedge x\notin A_i)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(\exists i)(i\in I\wedge x\in B\wedge x\notin A_i)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(\exists i)(i\in I\wedge x\in B-A_i)]\Leftrightarrow[x\in\bigcup_{i\in I}(B-A_i)]$$

f) La demostración es análoga a la del apartado e).

g) Si (x,y) es un par ordenado arbitrario entonces se verifica:

$$[(x,y)\in B\times(\bigcup_{i\in I}A_i)]\Leftrightarrow[x\in B\wedge y\in\bigcup_{i\in I}A_i]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(x\in B)\wedge(\exists i)(i\in I\wedge y\in A_i)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(\exists i)(i\in I\wedge x\in B\wedge y\in A_i)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(\exists i)(i\in I\wedge(x,y)\in B\times A_i)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(x,y)\in\bigcup_{i\in I}B\times A_i)]$$

h) i) j): La demostración es análoga a la del apartado g).

□

Proposición 6

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son familias de conjuntos, entonces se verifica:

a) $\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] \cap \left[\bigcup_{j\in J} B_j\right] = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$

b) $\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \cup \left[\bigcap_{j\in J} B_j\right] = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$

Demostración:

a) Si notamos $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ entonces se verifica

$$A \cap \left[\bigcup_{j\in J} B_j\right] = \bigcup_{j\in J} [A \cap B_j] = \bigcup_{j\in J} \left[\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B_j\right] = \bigcup_{j\in J} \left[\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_j)\right]$$

Finalmente, basta observar que para cada conjunto arbitrario x resulta:

$$\left[x \in \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_j)\right)\right] \Leftrightarrow \left[(\exists j)\left(j\in J \wedge x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_j)\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\exists j)(\exists i)(j\in J \wedge i\in I \wedge x\in A_i \cap B_j)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\exists (i,j))((i,j)\in I\times J \wedge x\in A_i \cap B_j)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)\right]$$

b) La demostración es análoga a la del apartado a)

□

Proposición 7

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B; $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de partes de A y $\{B_j\}_{j\in J}$ es una familia de partes de B, entonces se verifica:

a) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

b) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

Además en dicha inclusión, se verifica la igualdad para cada tal familia $\{A_i\}_{i\in I}$ sí y sólo sí la aplicación f es inyectiva.

c) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

d) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

Demostración:

a) Si x es un conjunto arbitrario entonces se verifica:

$$[x\in f(\bigcup_{i\in I} A_i)] \Leftrightarrow [(\exists y)(y\in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x = f(y))] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists y)(\exists i)(i\in I \wedge y\in A_i \wedge x = f(y))] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists i)(i\in I \wedge x\in f(A_i))] \Leftrightarrow [x\in \bigcup_{i\in I} f(A_i)]$$

b) Si x es un conjunto arbitrario entonces se verifica:

$$[x\in f(\bigcap_{i\in I} A_i)] \Rightarrow [(\exists y)(y\in \bigcap_{i\in I} A_i \wedge x = f(y))] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\exists y)(\forall i)(i\in I \Rightarrow y\in A_i \wedge x = f(y))] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in f(A_i))] \Rightarrow [x\in \bigcap_{i\in I} f(A_i)]$$

Además, si para cada familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de partes de A, se verifica $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, entonces, de la proposición 10 (§3, cap I, pág. 50) deducimos la inyectividad de f.

Recíprocamente, si f es una aplicación inyectiva y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de partes de A entonces para cada conjunto x se verificará:

$$[x\in \bigcap_{i\in I} f(A_i)] \Rightarrow [(\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in f(A_i))]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\forall i)(i\in I \Rightarrow (\exists x_i)(x_i\in A_i \wedge x = f(x_i)))]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\exists y)(\forall i)(i\in I \Rightarrow y\in A_i \wedge x = f(y))]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\exists y)(y\in \bigcap_{i\in I} A_i \wedge x = f(y))] \Rightarrow [x\in f(\bigcap_{i\in I} A_i)]$$

de donde deducimos $\bigcap_{i\in I} f(A_i) \subset f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ y, por tanto,

$$\bigcap_{i\in I} f(A_i) = f(\bigcap_{i\in I} A_i).$$

c) Si x es un conjunto arbitrario entonces se verifica:

$$[x\in f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)] \Leftrightarrow [f(x)\in \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [(\exists j)(j\in J \wedge f(x)\in B_j)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\exists j)(j\in J \wedge x\in f^{-1}(B_j)] \Leftrightarrow [x\in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)]$$

d) Si x es un conjunto arbitrario entonces se verifica:

$$[x\in f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j)] \Leftrightarrow [f(x) \in \bigcap B_j] \Leftrightarrow [(\forall j)(j\in J \Rightarrow f(x)\in B_j)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\forall j)(j\in J \Rightarrow x\in f^{-1}(B_j))]\Leftrightarrow [x\in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)]$$

□

Recubrimientos y particiones de un conjunto

Definición: Diremos que una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento del conjunto A sí y sólo sí $A\subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Trivialmente, cualquier familia de conjuntos constituye un recubrimiento del "conjunto" vacío y, además, todo recubrimiento de un conjunto A es un recubrimiento de cualquier subconjunto de A.

Proposición 8

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento del conjunto A. Sean f y g aplicaciones de A en un cierto conjunto B tales que, para cada $i \in I$: $f|_{A\cap A_i} = g|_{A\cap A_i}$. En tal situación se verifica f = g.

Demostración:

Basta tener presente que si $x \in A$ entonces existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$ y, por tanto, $f(x) = g(x)$.

□

Proposición 9

Sea A un conjunto, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y, para cada $i \in I$, sea f_i una aplicación de A_i en A de manera que

$$(\forall i)(\forall j)\ (i\in I \wedge j\in I \Rightarrow f_i|_{A_i\cap A_j} = f_j|_{A_i\cap A_j}).$$

En tal situación, existe una única aplicación f de $\bigcup_{i\in I} A_i$ en A que prolonga a f_i, para cada $i \in I$.

Demostración:

Notemos para cada $i \in I$: $f_i = (G_i, A_i, A)$ y sea $G = \bigcup_{i\in I} G_i$. Puesto que $(\forall i)(i\in I \Rightarrow G_i \subset A_i \times A)$ resultará

$$G = \bigcup_{i\in I} G_i \subset \bigcup_{i\in I} (A_i \times A) = (\bigcup_{i\in I} A_i) \times A$$

es decir, G es una gráfica de $\bigcup_{i\in I} A_i$ en A. Por otra parte, si $(x,y) \in G$ y $(x,z) \in G$ entonces existen $i \in I$ y $j \in I$ tales que $y = f_i(x)$ y $z = f_j(x)$. Ahora bien, teniendo presente que

$$x \in A_i \cap A_j \quad \text{y que} \quad f_i|_{A_i\cap A_j} = f_j|_{A_i\cap A_j}$$

deducimos que y = z, es decir, G es una gráfica funcional.

Además, como $\text{dom } G_i = A_i$ (para cada $i \in I$) resulta

$$\text{dom} \bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{i\in I} A_i$$

y, por tanto, la terna ordenada $f = (G, \bigcup_{i\in I} A_i, A)$ es una aplicación que prolonga a f_i, para cada $i \in I$.

Finalmente, la unicidad de la aplicación f sigue, inmediatamente, de la proposición anterior.

□

Definición: Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son recubrimientos de un conjunto A entonces diremos que el recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ es más fino que $\{B_j\}_{j\in J}$ (o bien que $\{B_j\}_{j\in J}$ es menos fino que $\{A_i\}_{i\in I}$) sí y sólo sí para cada $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $A_i \subset B_j$.

Trivialmente, todo recubrimiento de un conjunto es más fino que él mismo; además si $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_j\}_{j\in J}$, $\{C_k\}_{k\in K}$ son recubrimientos del conjunto A tales que $\{A_i\}_{i\in I}$ es más fino que $\{B_j\}_{j\in J}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ es más fino que $\{C_k\}_{k\in K}$ entonces, el recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ es más fino que $\{C_k\}_{k\in K}$.

Proposición 10

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son recubrimientos del conjunto A, entonces existe un recubrimiento $\{C_k\}_{k\in K}$ del conjunto A, más fino que $\{A_i\}_{i\in I}$ y que $\{B_j\}_{j\in J}$ verificando la siguiente condición: si $\{D_l\}_{l\in L}$ es un recubrimiento de A más fino que $\{A_i\}_{i\in I}$ y que $\{B_j\}_{j\in J}$ entonces también es más fino que $\{C_k\}_{k\in K}$.

Demostración:

Consideremos la familia de conjuntos $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ y sea $x \in A$.

En tal situación existen $i \in I$ y $j \in J$ tales que $x \in A_i$ y $x \in B_j$, luego $x \in A_i \cap B_j$ y por tanto $A \subset \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$. Es decir, $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ es un recubrimieto de A, trivialmente, más fino que $\{A_i\}_{i \in I}$ y que $\{B_j\}_{j \in J}$.

Además, si $\{D_l\}_{l \in L}$ es un recubrimiento más fino que $\{A_i\}_{i \in I}$ y que $\{B_j\}_{j \in J}$ entonces, para cada $l \in L$ existen $i \in I$ y $j \in J$, tales que $D_l \subset A_i$ y $D_l \subset B_j$. Luego existe $(i,j) \in I \times J$ tal que $D_l \subset A_i \cap B_j$, de donde resulta que el recubrimiento $\{D_l\}_{l \in L}$ es más fino que $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j) \in I \times J}$.

□

Definición: Diremos que una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de partes de un conjunto A es una partición de A sí y sólo sí verifica simultáneamente las condiciones siguientes:

a) $(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i \neq \emptyset)$

b) $(\forall i)(\forall j)(i \in I \wedge j \in I \wedge i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$

c) $\{A_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de A.

Obsérvese que la condición c) es equivalente a $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ ya que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de partes de A.

Si A es un conjunto no vacío, entonces la aplicación f de A en P(A) definida por $f(x) = \{x\}$, para cada $x \in A$, es trivialmente una partición del conjunto A.

Proposición 11

Sea B un conjunto, $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de un conjunto A y, para cada $i \in I$, sea f_i una aplicación de A_i en B. En tal situación existe una única aplicación f de A en B tal que

$$(\forall i)\ (\ i \in I \Rightarrow f|_{A_i} = f_i)$$

Demostración:

Basta aplicar la proposición 9 del presente parágrafo (pág. 75) y tener en cuenta que

$$(\forall i)(\forall j)(i \in I \wedge j \in I \wedge i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$$

es decir,

$$(\forall i)(\forall j)(i \in I \wedge j \in I \wedge i \neq j \Rightarrow f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j})$$

□

Proposición 12

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición del conjunto A, $\{B_i\}_{i \in I}$ una partición del conjunto B y, para cada $i \in I$, f_i sea una aplicación biyectiva de A_i en B_i. En tal situación existe una única aplicación biyectiva f de A en B tal que $(\forall i)(i \in I \Rightarrow f|_{A_i} = f_i)$.

Demostración:

Si $x \in A$ e $i \in I$ es el único índice tal que $x \in A_i$ entonces definimos $f(x) = f_i(x)$; de esta forma obtenemos una aplicación f de A en B verificando $f_i = f|_{A_i}$, para cada $i \in I$.

Sean $x \in A$ e $y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Si $x \in A_i$ $(i \in I)$ e $y \in A_j$ $(j \in I)$ entonces $f_i(x) = f_j(y)$ y, por tanto, $i = j$. En consecuencia $x = y$.

La epiyectividad de f es consecuencia inmediata de la epiyectividad de f_i, para cada $i \in I$.

Finalmente, la unicidad de la aplicación f se deduce trivialmente de la proposición anterior.

□

Proposición 13

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son particiones del conjunto A, entonces existe una partición $\{C_k\}_{k\in K}$ de A, más fina que $\{A_i\}_{i\in I}$ y que $\{B_j\}_{j\in J}$ verificando la siguiente condición: si $\{D_l\}_{l\in L}$ es una partición de A más fina que $\{A_i\}_{i\in I}$ y que $\{B_j\}_{j\in J}$ entonces también es más fina que $\{C_k\}_{k\in K}$.

Demostración:

Consideremos el conjunto

$$N = \{(i,j): (i,j)\in I\times J \wedge A_i \cap B_j = \emptyset\}$$

y notemos $K = I \times J - N$. Asímismo, si $k = (i,j)\in K$ notaremos $C_k = A_i \cap B_j$. Vamos a probar que $\{C_k\}_{k\in K}$ es una partición de A verificando las condiciones del enunciado.

En primer lugar, tengamos presente que $\{C_k\}_{k\in K}$ es un recubrimiento de A por serlo $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ y, además, porque para cada $(i,j)\in N$ se verifica $A_i \cap B_j = \emptyset$.

De la definición del conjunto K resulta que

$$(\forall k)(k\in K \Rightarrow C_k \neq \emptyset)$$

Por otra parte si $k = (i,j)\in K$, $k' = (i',j')\in K$ y $k \neq k'$ entonces

$$C_k \cap C_{k'} = (A_i \cap A_{i'}) \cap (B_j \cap B_{j'}) = \emptyset$$

ya que $(k \neq k') \Rightarrow (i \neq i') \vee (j \neq j')$.

Y puesto que, trivialmente, $\{C_k\}_{k\in K}$ es una familia de partes de A, deducimos que $\{C_k\}_{k\in K}$ es una partición de A.

Supongamos que $\{D_l\}_{l\in L}$ es una partición de A más fina que

$\{A_i\}_{i\in I}$ y que $\{B_j\}_{j\in J}$. En tal situación para cada $l\in L$ existirán $i\in I$ y $j\in J$ tales que $D_l\subset A_i$ y $D_l\subset B_j$, luego $D_l\subset A_i\cap B_j$. Ahora bien, teniendo presente que $D_l\neq\emptyset$ deducimos que $k=(i,j)\in K$ y, por tanto, $D_l\subset C_k$.

Conclusión: la partición $\{D_l\}_{l\in L}$ es más fina que $\{C_k\}_{k\in K}$: lo que completa la demostración de la proposición.

□

Producto de una familia de conjuntos

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos entonces hemos demostrado, como consecuencia del axioma de amalgamación y del axioma de sustitución, que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto. Recuérdese que notábamos por $F(I;\bigcup_{i\in I} A_i)$ a la clase cuyos elementos son las aplicaciones del conjunto I en $\bigcup_{i\in I} A_i$. Obsérvese que $F(I;\bigcup_{i\in I} A_i)$ es un conjunto, ya que es subclase de la clase cuyos elementos son las correspondencias de I en $\bigcup_{i\in I} A_i$, que demostramos (Cap. I. §3; proposición 4, pág. 44) es un conjunto.

Definición: Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos entonces el producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$, que notaremos $\prod_{i\in I} A_i$, es la clase

$$\prod_{i\in I} A_i = \{x: x\in F(I;\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge (\forall i)(i\in I \Rightarrow x(i)\in A_i)\}$$

Trivialmente, $\prod_{i\in I} A_i$ es un conjunto por ser subclase de $F(I;\bigcup_{i\in I} A_i)$.

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos tal que I posee únicamente dos elementos (por ejemplo $I=\{a,b\}$) entonces, todo elemento x de $\prod_{i\in I} A_i$ determina unívocamente un elemento del producto cartesiano $A_a\times A_b$ concretamente el par ordenado $(x(a),x(b))$. Recíprocamente, si $(\alpha,\beta)\in A_a\times A_b$ entonces determina unívocamente un elemento de $\prod_{i\in I} A_i$: concretamente la aplicación de I en $\bigcup_{i\in I} A_i$ definida por $x(a)=\alpha$ y $x(b)=\beta$ (que, obviamente, pertenece al conjun

to $\prod_{i\in I} A_i$). Por tanto, en tales condiciones, podemos establecer de manera natural una biyección entre $\prod_{i\in I} A_i$ y $A_a \times A_b$; lo cual nos permitirá asegurar que el producto de familias de conjuntos generaliza "por identificación" el producto cartesiano de dos conjuntos.

Definición: Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos y $j \in I$ entonces la aplicación Π_j de $\prod_{i\in I} A_i$ en A_j, definida por $\Pi_j(x) = x(j)$, recibe el nombre de proyección j-ésima de $\prod_{i\in I} A_i$.

Trivialmente, para cada $j \in I$, la proyección Π_j es una aplicación epiyectiva de $\prod_{i\in I} A_i$ en A_j.

Proposición 14

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, entonces se verifica:

$$[\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset] \Leftrightarrow [(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i \neq \emptyset)]$$

Demostración:

Si $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ entonces existe un elemento $x \in \prod_{i\in I} A_i$. Luego resultará $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x(i) \in A_i)$, es decir

$$(\forall i)\ (i \in I \Rightarrow A_i \neq \emptyset)$$

Recíprocamente, supongamos que $(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i \neq \emptyset)$ y consideremos una función de elección φ de $\bigcup_{i\in I} A_i$. Si x es la aplicación de I en $\bigcup_{i\in I} A_i$ definida por $x(i) = \varphi(A_i) \in A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, entonces $x \in \prod_{i\in I} A_i$ luego $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

□

Proposición 15

Si $\{A_{(i,j)}\}_{(i,j)\in I\times J}$ es una familia de conjuntos, entonces se verifica:

$$\bigcap_{i\in I}\left[\prod_{j\in J} A_{(i,j)}\right] = \prod_{i\in I}\left[\bigcap_{j\in J} A_{(i,j)}\right]$$

Demostración:

Si x es un conjunto entonces:

$$\left[x\in \bigcap_{i\in I}\left(\prod_{j\in J} A_{(i,j)}\right)\right] \Leftrightarrow \left[(\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in \prod_{j\in J} A_{(i,j)})\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cdot\ [(\forall i)(\forall j)(i\in I \wedge j\in J \Rightarrow x(i)\in A_{(i,j)})] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [(\forall i)(i\in I \Rightarrow x(i)\in \bigcap_{j\in J} A_{(i,j)})] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x\in \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{(i,j)}\right)\right]$$

□

Corolario

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias de conjuntos, entonces se verifica:

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} (A_i \cap B_i)$$

En efecto: Bata aplicar la proposición anterior considerando J un conjunto que posea, únicamente, dos elementos.

□ □

PROBLEMAS

1.- Si a es un conjunto y b es una clase propia ¿qué puede afirmarse acerca de las clases $a-b$; $b-a$; $a \cup b$; $a \cap b$; $a \times b$?

2.- Si a es una clase y notamos $\psi(a) = \{x: x \subset a\}$ ¿puede existir un conjunto x tal que $\psi(x) = x$? ¿puede existir una clase x tal que $\psi(x) = x$?

3.- Si a y b son conjuntos demostrar:
a) $[a=b] \Leftrightarrow [(\forall x)(a \in x \Rightarrow b \in x)]$
b) $[a \subset \{b\}] \Leftrightarrow [(a = \{b\}) \vee (a = \emptyset)]$
¿puede asegurarse una relación análoga para clases propias?.

4.- Consideremos la clase $A = \{x: (\exists y)(\exists z)(y \in z \wedge x = (y,z))\}$ demostrar:
a) $(\forall x)(x \in \mathcal{U} \Rightarrow \{x\} \notin A)$
b) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cap (\mathcal{U}-A) \neq \emptyset)$
c) Si $(y,z) \in A$ entonces $z \in \mathcal{U}$.
d) $(A \notin \mathcal{U}) \wedge (A \neq \mathcal{U})$.

5.- Demostrar que la clase cuyos elementos son las particiones de un conjunto, es un conjunto.

6.- ¿Pueden existir conjuntos tales que sus correspondientes conjuntos de partes sean disjuntos?.
¿Puede existir un conjunto A tal que $A \cup P(A) = \emptyset$?
¿Y tal que $A \cap P(A) = \emptyset$?.

7.- Si a y b son conjuntos demostrar las relaciones:
a) $\cup(a,b) = \{a,b\}$
b) $\cap(a,b) = \{a\}$
c) $\cup\cap(a,b) = a$
d) $\cap\cup(a,b) = a \cap b$
e) $\cap\cap(a,b) = a$
f) $\cup\cup(a,b) = a \cup b$

8.- Si a y b son clases propias demostrar:
a) $\cup\cap(a,b) = \cap\cup(a,b) = \emptyset$
b) $\cup\cup(a,b) = \cap\cap(a,b) = U$

9.- Si A y B son clase demostrar:
a) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \cap A \subset x \subset \cup A)$
b) $\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$
c) $\cup(A \cap B) \subset (\cup A) \cap (\cup B)$
d) $(\cap A) \cap (\cap B) \subset \cap (A \cap B)$
e) $\cap(A \cup B) \subset (\cap A) \cup (\cap B)$
Mediante sendos contraejemplos comprobar que las inclusiones recíprocas en los apartados c),d) y e) son falsas, en general.

10.- Notemos para cada clase A: $A' = A \cup \{A\}$; demostrar que si A es una clase propia entonces se verifica:

$$[\cup A' = A] \Leftrightarrow [A = U]$$

11.- Sea A un conjunto y F(x) un predicado sobre A. Definimos el conjunto verdad de F(x) en A, que notaremos $A_{(F,1)}$, al conjunto:

$$A_{(F,1)} = \{x: (x \in A) \wedge (F(x) \text{ es verdadera})\}$$

y definimos el conjunto falso de F(x) en A, que notaremos $A_{(F,0)}$, al conjunto:

$$A_{(F,0)} = \{x: (x \in A) \wedge (F(x) \text{ es falsa})\}$$

Si G(x) es otro predicado sobre A demostrar:

a) $A_{(F \vee G,1)} = A_{(F,1)} \cup A_{(G,1)}$
b) $A_{(F \wedge G,1)} = A_{(F,1)} \cap A_{(G,1)}$
c) $A_{(\neg F,1)} = A - A_{(F,1)}$
d) $A_{(F \vee G,0)} = A_{(F,0)} \cap A_{(G,0)}$
e) $A_{(F \wedge G,0)} = A_{(F,0)} \cup A_{(G,0)}$
f) $A_{(\neg F,0)} = A - A_{(F,0)}$

12.- Si A es un conjunto ¿son verdaderas algunas de las siguientes inclusiones

$$A \subset U-\{A\}; \quad A \subset \{A\}; \quad \{A\} \subset U-A;$$
$$\{A\} \subset U-\{A\}; \quad \{A\} \subset A; \quad A \subset U-A ?$$

¿y si A es una clase propia?.

13.- Demostrar que si A es un conjunto entonces

$$(A = \emptyset \Leftrightarrow A \subset A \times A)$$

Indicación: Para la implicación recíproca, considérese el conjunto $B = A \cup [\cup A] \neq \emptyset$ y aplíquese el axioma de regularidad.

14.- Demostrar que

$$(\forall a)(a \in U \Rightarrow \{a\}\times\{a\} = \{\{\{a\}\}\})$$

¿es verdadera la relación $\{a\}\times\{a\} = \{\{\{a\}\}\}$ para clases propias?

15.- Sean A y B dos conjuntos; demostrar que la clase cuyos elementos son las gráficas de A en B es un conjunto.

16.- Sean $A \in U$, $B \in U$, C_1 una correspondencia de A en B y C_2 una correspondencia de B en A tales que:
a) Para cada $x \in A$ se verifica $(C_2 \circ C_1)(\{x\}) = \{x\}$
b) Para cada $x \in B$ se verifica $(C_1 \circ C_2)(\{x\}) = \{x\}$
Demostrar que C_1 y C_2 son aplicaciones biyectivas y, además, $C_2 = C_1^{-1}$.

17.- Sean dos conjuntos A y B; demostrar que una aplicación f de A en B es biyectiva sí y sólo sí para cada subconjunto C de A se verifica

$$f(A-C) = B - f(C).$$

18.- Sean A,B,C conjuntos; $f \in F(A;B)$, $g \in F(B;C)$, $h \in F(C;A)$; y consideremos las composiciones

$$h\circ g\circ f \in F(A;A); \quad g\circ f\circ h \in F(C;C); \quad f\circ h\circ g \in F(B;B)$$

Demostrar que si dos de dichas composiciones son epiyectivas y la otra composición es inyectiva, entonces las aplicaciones f, g y h son biyectivas.
Indicación: Téngase presente las proposiciones 1 y 2 del parágrafo 4.

19.- Sea f una aplicación del conjunto A en el conjunto B y consideremos

$$f_1 \in F(P(A);P(B)); \qquad f_2 \in F(P(B);P(A))$$

definidas así:

$f_1(C) = f(C)$, para cada $C \in P(A)$.
$f_2^1(C) = f^{-1}(C)$, para cada $C \in P(B)$.

Demostrar:

a) f_1 es inyectiva sí y sólo sí f es inyectiva.
b) f_1 es epiyectiva sí y sólo sí f es epiyectiva.
c) f_1 es biyectiva sí y sólo sí f es biyectiva.
d) f_2 es inyectiva sí y sólo sí f es epiyectiva.
e) f_2 es epiyectiva sí y sólo sí f es inyectiva.
f) f_2 es biyectiva sí y sólo sí f es biyectiva.

20.- Sean A,B,C conjuntos no vacíos, $f \in F(A;B)$ y $g \in F(B;C)$; demostrar que existe una aplicación $h \in F(C;A)$ verificando $f \circ h \circ g = I_B$ sí y sólo sí f es epiyectiva y g es inyectiva.

21.- Sea I un conjunto no vacío, $\{I_j\}_{j\in J}$ una partición de I y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Demostrar la existencia de una aplicación biyectiva de $\prod_{j\in J}(\prod_{i\in I_j} A_i)$ en $\prod_{i\in I} A_i$.

Indicación: Considérese

$$\varphi \in F(\prod_{j\in J}(\prod_{i\in I_j} A_i);\ \prod_{i\in I} A_i)$$

definida así: si

$$g \in \prod_{j\in J}(\prod_{i\in I_j} A_i)$$

y para cada $i \in I$ notamos j_i al elemento de J tal que $i \in I_j$ entonces

$$[\varphi(g)](i) = [g(j_i)](i) \in A_i.$$

22.- Demostrar que una aplicación f de un conjunto A en sí mismo es biyectiva y $f = f^{-1}$ sí y sólo sí $f \circ f = I_A$.

23.- Si G es una gráfica de un conjunto A en un conjunto B tal que $\operatorname{dom} G = A$, demostrar la existencia de una aplicación $f = (G',A,B)$ tal que $G' \subset G$.
Indicación: Considérese una función de elección del conjunto B.

24.- Demostrar que si A es un conjunto no vacío entonces la clase

$$B = \{C: \text{Existe una aplicación biyectiva de } A \text{ en } C\}$$

es propia.
Indicación: Considérese la gráfica G de U en B definida así $G(a) = A \times \{a\}$ (para cada $a \in U$).

25.- Demostrar que si A es un conjunto entonces las clases $B = \{x: A \subset x\}$ y $C = \{x: A \cap x = \emptyset\}$ son propias.
Indicación: Para probar que C es propia considérese la gráfica G de $\mathcal{U}-A$ en C definida así $G(a) = \{a\}$ (para cada $a \in \mathcal{U}-A$). Para probar que B es propia considérese la gráfica H de C en B definida así: $H(a) = A \cup a$ (para cada $a \in C$).

26.- Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos describir las clases
$B = \{x: (\forall i)(i \in I \wedge x \in A_i)\}$ y $C = \{x: (\exists i)(i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$
Indicación: Obsérvese que I es un conjunto no vacío y, en consecuencia, $(\forall i)(i \in I \wedge x \in A_i)$ es una proposición idénticamente falsa y $(\exists i)(i \in I \Rightarrow x \in A_i)$ es una proposición idénticamente verdadera.

27.- Demostrar que una aplicación entre dos conjuntos es biyectiva sí y sólo sí posee una única sección y una única retracción.

28.- ¿Pueden existir conjuntos a y b tales que $(a,b) = \{a,b\}$?¿y clases propias?

29.- Analizar cuales de las siguientes clases son propias:

$A = \{x: x \in \emptyset \Rightarrow x \in x\}$
$B = \{x: (\exists y)(y \in \mathcal{U} \wedge y \in x)\}$
$C = \{x: (\exists y)(y \in \mathcal{U} \wedge x \in y)\}$
$D = \{x: x \in \emptyset \Leftrightarrow x \notin x\}$
$E = \{x: (\forall y)(y \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in y)\}$
$F = \{x: x \in x \Rightarrow x \in \emptyset\}$
$G = \{x: (\forall y)(y \in \mathcal{U} \Rightarrow y \in x)\}$
$H = \{x: \mathcal{U} \notin \mathcal{U}\}$

30.- ¿Puede ser la clase universal $\mathcal{U}$ una gráfica o relación binaria entre dos clases A y B?. ¿Es cierta la relación $\mathcal{U} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$?.

31.- Si A es un conjunto demostrar

i) $A = \cup P(A)$.
ii) $A = \cap P(A) \Leftrightarrow A = \emptyset$.

32.- Demostrar que la clase $A = \{x: (\exists y)(y \in \mathcal{U} \wedge x = P(y))\}$ y la clase $\mathcal{U}-A$ son propias.
Indicación: Considérese la gráfica F de $\mathcal{U}$ en A definida

por $F(a) = P(a)$ (para cada $a \in U$) y la gráfica G de $U-\{\emptyset\}$ en $U-A$ definida por $G(a) = \{a\}$ (para cada $a \in U-\{\emptyset\}$).

33.- ¿Puede afirmarse que la "aplicación vacía" sobre un conjunto B, que notamos por $\emptyset_B$, coincide con la clase vacía?.

34.- Si A es una clase y notamos $[A] = \{x: x = A\}$, demostrar que $[A] = \{A\}$ sí y sólo sí A es un conjunto.

35.- Si A es una clase propia y B es una clase, demostrar que la clase $A \times B$ es propia sí y sólo sí $B \neq \emptyset$.

36.- Demostrar que un simplete es una clase propia sí y sólo sí coincide con la clase universal.

37.- Sea A un conjunto no vacío y B un conjunto. Demostrar la equivalencia de las proposiciones:

i) Existe una aplicación inyectiva de A en B.

ii) Existe una aplicación epiyectiva de B en A.

Indicación: Téngase presente el corolario del teorema 1 y el corolario del teorema 2, del §4.

38.- Sea A una clase y B una subclase de A verificando la condición $(\forall x)(x \in A \wedge x \cap A \subset B \Rightarrow x \in B)$. Demostrar que $B = A$.
(Teorema de $\in$-inducción transfinita para clases).
Indicación: Suponed $B \neq A$ y aplíquese el axioma de regularidad a la clase $A-B$.

39.- Encontrar el error del razonamiento siguiente: "Si notamos $B = \{x: x \in \emptyset \Rightarrow x = \emptyset\}$ entonces resulta que al ser verdadera la proposición $U \in \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$ se verifica $U \in B$. Por tanto, la clase universal es un conjunto"
Indicación: Téngase presente el axioma I de clasificación.

40.- Demostrar que existe una única aplicación f de un conjunto A en sí mismo tal que $f \circ f^{-1} = f$.
Indicación: Pruébese que la tal aplicación f ha de ser biyectiva.

2

RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y DE ORDEN

§1. RELACIONES DE EQUIVALENCIA EN UNA CLASE

Definición: Si A es una clase y R es una gráfica o relación binaria de A en A (o más brevemente R es una relación en A) entonces diremos que:

a) R es reflexiva sí y sólo sí:

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow (x,x) \in R)$$

b) R es simétrica sí y sólo sí:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$$

c) R es transitiva sí y sólo sí:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$$

d) R es antisimétrica sí y sólo sí:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y)$$

e) R es conexa sí y sólo sí:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (x,y) \in R \vee (y,x) \in R)$$

Si R es una relación en la clase A y $(x,y) \in R$, entonces diremos que el elemento x está relacionado con el elemento y, por R, y lo expresaremos frecuentemente por $x\ R\ y$.

Definición: Diremos que una relación R en la clase A es de equivalencia sí y sólo sí verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Si R es una relación de equivalencia en la clase A entonces R^{-1} es una relación de equivalencia en A. Además si $B \subset A$ y notamos $R^*_{\restriction B} = R \cap (B \times B)$ entonces, trivialmente, $R^*_{\restriction B}$ es una relación de equivalencia en B, que la denominaremos inducida por R en B. Si A es una clase entonces Δ_A es una relación de equivalencia en A, denominada relación de igualdad en la clase A.

Definición: Si R es una relación de quivalencia en la clase A y a es un elemento de A entonces definimos la clase de equivalencia de a por R, que notaremos $\bar{a}$, a la clase:

$$\bar{a} = \{x: \ x \in A \wedge (a,x) \in R\}$$

Si $x \in \bar{a}$ entonces diremos que el elemento x es un representante de la clase de equivalencia $\bar{a}$.

Proposición 1

Si R es una relación de equivalencia en la clase A, entonces se verifica:

a) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \bar{x} \neq \emptyset)$

b) $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \ R \ y))$

c) $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow (\exists z)(\exists t)(z \in \bar{x} \wedge t \in \bar{y} \wedge z \ R \ t)))$

d) $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset))$

Demostración:

a) Basta observar que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \ R \ x)$

b) Sean x e y elementos de A tales que $\bar{x} = \bar{y}$. Puesto que $x \in \bar{x} = \bar{y}$ resulta $x \in \bar{y}$, es decir y R x, de donde resulta x R y.

Recíprocamente, si x e y son elementos de A tales que $x\ R\ y$ entonces para cada $z\in\bar{x}$ se verifica $x\ R\ z$, y de la simetría de R deducimos $z\ R\ x$. Puesto que $x\ R\ y$ de la transitividad de R resulta $z\ R\ y$, por tanto $z\in\bar{y}$.
Por otra parte, para cada $z\in\bar{y}$ se verifica $y\ R\ z$. Puesto que $x\ R\ y$ deducimos $x\ R\ z$, es decir, $z\in\bar{x}$. Conclusión: $\bar{x}=\bar{y}$.

c) Si x e y son elementos de A verificando $\bar{x}=\bar{y}$ entonces $x\in\bar{x}\wedge y\in\bar{y}$ y, por el apartado anterior, $x\ R\ y$.
Recíprocamente, si existen elementos z,t de A tales que $z\in\bar{x}\wedge\ \wedge t\in\bar{y}\ \wedge\ z\ R\ t$ entonces deducimos $\bar{z}=\bar{x}=\bar{y}=\bar{t}$.

d) Si x e y son elementos de A verificando $\bar{x}=\bar{y}$ entonces $\bar{x}\cap\bar{y}=\bar{x}\neq\emptyset$.
Recíprocamente, supongamos $\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset$ y sea $z\in\bar{x}\cap\bar{y}$. Puesto que $z\in\bar{x}\wedge z\in\bar{y}$ resulta $x\ R\ z$ e $y\ R\ z$, es decir, $x\ R\ z\wedge z\ R\ y$. Conclusión: $x\ R\ y$, luego $\bar{x}=\bar{y}$.

□

Es interesante tener presente que si R es una relación de equivalencia en una clase A entonces las clases de equivalencia de los elementos de A, por R, son subclases de A que, en general, no serán conjuntos. Por ello, carecerá de sentido considerar, en general, la clase cuyos elementos son todas las clases de equivalencia por R. En cambio si A es un conjunto entonces las clases de equivalencia de los elementos de A son conjuntos, por ser subclases de A y, en tal caso, podemos considerar la clase cuyos elementos son todas las clases de equivalencias por dicha relación. Notaremos dicha clase por A/R que, por ser subclase de $P(A)$, será un conjunto que denominaremos conjunto cociente del conjunto A por la relación de equivalencia R.

Proposición 2

Si A es un conjunto no vacío y R es una relación de equivalencia en A, entonces la inyección canónica de A/R en $P(A)$ constituye una partición del conjunto A.

Demostración:

Veamos que la familia $\{\bar{x}\}_{\bar{x}\in A/R}$ de partes de A es una partición de A.

Todo conjunto de la familia $\{\bar{x}\}_{\bar{x}\in A/R}$ es no vacío, por el apartado a) de la proposición anterior.

Si $\bar{x}\in A/R \wedge \bar{y}\in A/R \wedge \bar{x}\neq\bar{y}$ entonces $\bar{x}\cap\bar{y}=\emptyset$ ya que si $\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset$ resultaría, del apartado d) de la proposición anterior, que $\bar{x}=\bar{y}$.

Finalmente, por ser $\{\bar{x}\}_{\bar{x}\in A/R}$ una familia de partes de A se verificará $\bigcup_{\bar{x}\in A/R}\bar{x}\subset A$. Por otra parte si x es un elemento arbitrario de A entonces $x\in\bar{x}\subset\bigcup_{\bar{x}\in A/R}\bar{x}$, luego $A\subset\bigcup_{\bar{x}\in A/R}\bar{x}$. Conclusión: $A=\bigcup_{\bar{x}\in A/R}\bar{x}$; lo que completa la demostración. □

Acabamos, pues, de demostrar que toda relación de equivalencia en un conjunto no vacío determina una partición en dicho conjunto. A continuación, vamos a demostrar una especie de recíproco, en el siguiente sentido:

Proposición 3

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición del conjunto A entonces, existe una única relación de equivalencia R en A tal que los conjuntos de la partición que determina R en A son, precisamente, los conjuntos de la partición $\{A_i\}_{i\in I}$.

Demostración:

Definimos una relación R en el conjunto A del siguiente modo: si $x \in A$ e $y \in A$ entonces

$$[(x,y) \in R] \Leftrightarrow [(\exists i)(i \in I \wedge x \in A_i \wedge y \in A_i)]$$

La reflexividad de R resulta de que $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ la simetría es inmediata y para probar la transitividad de R consideremos $x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A$ tales que $x \, R \, y$ e $y \, R \, z$; entonces, existirán $i \in I$ y $j \in I$ tales que $x \in A_i \wedge y \in A_i \wedge y \in A_j \wedge z \in A_j$. Por tanto $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, luego $i = j$; es decir $x \, R \, z$.

Así pues, R es una relación de equivalencia en A. Además los conjuntos de la partición de A que determina R (es decir, las clases de equivalencia de los elementos de A, por R) son, trivialmente, los conjuntos de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$.

Finalmente, si R' es una relación de equivalencia en A tal que los conjuntos de la partición de A que determina son los de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces R y R' poseen las mismas clases de equivalencias y por tanto $R = R'$.

□

Definición: Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces la aplicación Π_R de A en A/R definida así "para cada $x \in A$: $\Pi_R(x) = \bar{x}$" recibe el nombre de epiyección canónica en A asociada a R.

Trivialmente, Π_R es una aplicación epiyectiva de A en A/R.

Relación de equivalencia asociada a una aplicación

Sea f una aplicación del conjunto A en el conjunto B y consideremos la relación R_f en A, definida así si $x \in A$ e $y \in A$ en-

tonces $[(x,y)\in R_f] \Leftrightarrow [f(x) = f(y)]$.

Obviamente R_f es una relación de equivalencia en A.

Definición: La relación de equivalencia R_f, anteriormente considerada, diremos que es asociada a la aplicación f en A.

Obsérvese que si G es una relación de equivalencia en A entonces $R_{\Pi_G} = G$ ya que

$$[(x,y)\in R_{\Pi_G}] \Leftrightarrow [\Pi_G(x) = \Pi_G(y)] \Leftrightarrow [\bar{x} = \bar{y}] \Leftrightarrow [(x,y)\in G]$$

Además, si B es un subconjunto de A e i_B es la inyección canónica de B en A entonces $R_{i_B} = \Delta_B$ ya que

$$[(x,y)\in R_{i_B}] \Leftrightarrow [i_B(x) = i_B(y)] \Leftrightarrow [x = y]$$

Definición: Sean A,B conjuntos, f una aplicación de A en B y R una relación de equivalencia en A. En tal situación, diremos que la aplicación f es compatible con R (o bien que f es constante sobre las clases de equivalencia, según R) sí y sólo sí para cada $x\in A$ e $y\in A$ se verifica $(x,y)\in R \Rightarrow f(x) = f(y)$.

De esta definición resulta, inmediatamente, que toda aplicación es compatible con la relación de equivalencia asociada a dicha aplicación.

Teorema 1

Si f es una aplicación del conjunto A en el conjunto B y R es una relación de equivalencia en A, entonces f es compatible con R sí y sólo sí existe una única aplicación h de A/R en B tal que $f = h\circ\Pi_R$

Demostración:

Supongamos que la aplicación f sea compatible con R. Puesto que Π_R es una aplicación epiyectiva poseerá, al menos, una sección s que, por tanto, verificará $\Pi_R \circ s = I_{A/R}$. Definimos $h = f \circ s$ y veamos que $f = h \circ \Pi_R$, es decir que $f = f \circ s \circ \Pi_R$. En efecto, para cada elemento $x \in A$ se verifica

$$\Pi_R(x) = (\Pi_R \circ s \circ \Pi_R)(x) = \Pi_R[(s \circ \Pi_R)(x)]$$

por tanto $(x,(s \circ \Pi_R)(x)) \in R$, es decir

$$f(x) = f[(s \circ \Pi_R)(x)] = (f \circ s \circ \Pi_R)(x)$$

Por otra parte, si h' es una aplicación de A/R en B tal que $h' \circ \Pi_R = f$ entonces $h \circ \Pi_R = h' \circ \Pi_R$ y, puesto que Π_R es epiyectiva, valdrá la ley de simplificación a la derecha, por tanto $h = h'$.

Recíprocamente, si existe una única aplicación h de A/R en B tal que $h \circ \Pi_R = f$ entonces, si $x \in A \wedge y \in A \wedge x\ R\ y$ resulta $\bar{x} = \bar{y}$.

Luego $\Pi_R(x) = \Pi_R(y)$, por tanto $h[\Pi_R(x)] = h[\Pi_R(y)]$, de donde deducimos $f(x) = f(y)$. Conclusión: la aplicación f es compatible con la relación de equivalencia R.

□

Definición: La aplicación h unívocamente determinada por la aplicación f, compatible con R según el teorema anterior, diremos que es la aplicación deducida de f por el paso al cociente por R.

Definición: Sean A y B conjuntos, R una relación de equivalencia en A, R' una relación de equivalencia en B y f una aplicación de A en B. En tal situación, diremos que f es compatible con las

relaciones R y R' sí y sólo sí la aplicación $\Pi_{R'} \circ f$ es compatible con R.

Proposición 4

Sean A y B conjuntos, R una relación de equivalencia en A, R' una relación de equivalencia en B y f una aplicación de A en B. En tal situación, f es compatible con R y R' sí y sólo sí existe una única aplicación h de A/R en A/R' tal que $h \circ \Pi_R = \Pi_{R'} \circ f$.

Demostración:

Basta aplicar el teorema anterior a la aplicación $\Pi_{R'} \circ f$ de A en B/R'.

□

Definición: La aplicación h unívocamente determinada por la aplicación f y por las relaciones de equivalencia R y R', según la proposición anterior, diremos que es deducida de la aplicación f por los pasos al cociente por R y R'.

Descomposición canónica de una aplicación

Teorema 2

Sean A y B conjuntos, f una aplicación de A en B, R_f la relación de equivalencia asociada a f, Π_{R_f} la epiyección canónica de A en A/R_f, e $i_{f(A)}$ la inyección canónica de f(A) en B. En tal situación, existe una única aplicación biyectiva $\bar{f}$ de A/R_f en f(A) verificando

$$f = i_{f(A)} \circ \bar{f} \circ \Pi_{R_f}$$

Demostración:

Consideremos la aplicación $\bar{f}$ de A/R_f en $f(A)$ definida así: para cada $\bar{x} \in A/R_f$: $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$.

Puesto que R_f es la relación de equivalencia asociada a f, la anterior definición de $\bar{f}$ es independiente del representante elegido de x ya que si $y \in \bar{x}$ entonces $(x,y) \in R_f$ y, por tanto, $f(x) = f(y)$.

Por otra parte, si $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$ entonces $f(x) = f(y)$ luego $(x,y) \in R_f$, es decir $\bar{x} = \bar{y}$; de donde sigue la inyectividad de $\bar{f}$.

La epiyectividad de $\bar{f}$ es inmediata, ya que si $x \in f(A)$ entonces existe $y \in A$ tal que $x = f(y)$, con lo cual $\bar{f}(\bar{y}) = f(y) = x$.

Finalmente, se verifica $f = i_{f(A)} \circ \bar{f} \circ \Pi_{R_f}$ ya que ambas aplicaciones están definidas en A y, para cada $x \in A$ resulta

$$(i_{f(A)} \circ \bar{f} \circ \Pi_{R_f})(x) = (i_{f(A)} \circ \bar{f})(\bar{x}) = i_{f(A)}(f(x)) = f(x).$$

Para establecer la unicidad de $\bar{f}$ consideremos una aplicación h de A/R_f en $f(A)$ verificando $f = i_{f(A)} \circ h \circ \Pi_{R_f}$. En tal situación resultará $i_{f(A)} \circ \bar{f} \circ \Pi_{R_f} = i_{f(A)} \circ h \circ \Pi_{R_f}$. Teniendo presente que las aplicaciones inyectivas pueden "simplificarse por la izquierda" y las aplicaciones epiyectivas pueden "simplificarse por la derecha", concluimos $h = \bar{f}$.

□

Relación de equivalencia cociente

Proposición 5

Si R y R' son relaciones de equivalencia en un conjunto A tales que $R \subset R'$, entonces la proyección canónica $\Pi_{R'}$ es compatible con R.

Demostración:

Si $x \in A$ e $y \in A$ son tales que $(x,y) \in R$ entonces $(x,y) \in R'$ y, por tanto, $\Pi_{R'}(x) = \Pi_{R'}(y)$. Es decir, $\Pi_{R'}$ es compatible con R. □

Resulta, pues, que si R y R' son relaciones de equivalencia en un conjunto A tales que $R \subset R'$ entonces existirá una única aplicación h de A/R en A/R' tal que $h \circ \Pi_R = \Pi_{R'}$.

Obsérvese que la tal aplicación h es epiyectiva, ya que

$$h(A/R) = h[\Pi_R(A)] = \Pi_{R'}(A) = A/R'$$

y por tanto, del teorema anterior deducimos la existencia de una aplicación biyectiva $\bar{h}$ tal que

$$h = I_{A/R'} \circ \bar{h} \circ \Pi_{R_h}$$

Definición: La relación de equivalencia R_h asociada a la tal aplicación h, unívocamente determinada por las relaciones R y R' en A, la denominaremos relación de equivalencia cociente en A por R relativa a R'.

A continuación pretendemos analizar la conexión existente entre las clases de equivalencia de los elementos de A por R y por R' y las clases de equivalencia de los elementos de A/R por R_h.

Si $x \in A$ entonces notaremos $\bar{x}$ la clase de equivalencia de x por R y por $\tilde{x}$ la clase de equivalencia de x por R'.

Si $\bar{x} \in A/R$ entonces notaremos por $C_{\bar{x}}$ a la clase de equivalencia de $\bar{x}$ por R_h.

Proposición 6

Sean R y R' relaciones de equivalencia en un conjunto A tales que $R \subset R'$ y R_h la relación de equivalencia cociente en A por R relativa a R'. En tal situación con la nomenclatura anteriormente considerada, para cada $x \in A$ se verifica $C_{\bar{x}} = \Pi_R(\tilde{x})$ (donde $\Pi_R(\tilde{x})$ ha de interpretarse como el conjunto imagen de $\tilde{x} \subset A$ por la aplicación Π_R).

Demostración:

Si $\bar{y} \in A/R$ es tal que $\bar{y} \in C_{\bar{x}}$ entonces $(\bar{x},\bar{y}) \in R_h$, luego $h(\bar{x}) = h(\bar{y})$. En consecuencia resulta $(h \circ \Pi_R)(x) = (h \circ \Pi_R)(y)$, es decir, $\Pi_{R'}(x) = \Pi_{R'}(y)$, o lo que es lo mismo $\tilde{x} = \tilde{y}$; de donde deducimos que $y \in \tilde{x}$. Puesto que $\bar{y} = \Pi_R(y)$ resulta $\bar{y} \in \Pi_R(\tilde{x})$, por tanto $C_{\bar{x}} \subset \Pi_R(\tilde{x})$. Veamos la inclusión recíproca.

Si $y \in \Pi_R(\tilde{x})$ entonces existe $z \in \tilde{x}$ tal que $y = \Pi_R(z) = \bar{z}$. Ahora bien

$$z \in \tilde{x} \Rightarrow \tilde{z} = \tilde{x} \Rightarrow \Pi_{R'}(z) = \Pi_{R'}(x) \Rightarrow (h \circ \Pi_R)(z) = (h \circ \Pi_R)(x) \Rightarrow h(\bar{z}) = h(\bar{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{z},\bar{x}) \in R_h \Rightarrow \bar{z} \in C_{\bar{x}} \Rightarrow y \in C_{\bar{x}}$$

luego, $\Pi_R(\tilde{x}) \subset C_{\bar{x}}$: lo que completa la demostración.

□

Relación de equivalencia producto

Si R_1 es una relación de equivalencia en el conjunto A y R_2 es una relación de equivalencia en el conjunto B, entonces definimos una relación R en $A \times B$, asociada a R_1 y R_2, así:

$$R = \{((x,y),(z,t)) : (x,z) \in R_1 \wedge (y,t) \in R_2\} \subset (A \times B) \times (A \times B)$$

Proposición 7

La relación R, anteriormente definida, es de equivalencia en $A \times B$.

Demostración:

Si $(x,y) \in A \times B$ entonces $(x,x) \in R_1$ e $(y,y) \in R_2$, luego $((x,y),(x,y)) \in R$, es decir R es reflexiva.

Si $((x,y),(z,t)) \in R$ entonces $(x,z) \in R_1 \wedge (y,t) \in R_2$, por tanto $(z,x) \in R_1 \wedge (t,y) \in R_2$, es decir, $((z,t),(x,y)) \in R$, de donde sigue la simetría de R.

Finalmente, si $((x,y),(z,t)) \in R \wedge ((z,t),(u,v)) \in R$ entonces $(x,z) \in R_1 \wedge (y,t) \in R_2 \wedge (z,u) \in R_1 \wedge (t,v) \in R_2$, por tanto de la transitividad de R_1 y R_2 deducimos $(x,u) \in R_1 \wedge (y,v) \in R_2$, es decir $((x,y),(u,v)) \in R$, de donde sigue la transitividad de R.

□

Definición: La relación de equivalencia R en $A \times B$, anteriormente definida, y asociada a R_1 y R_2 la denominaremos relación de equivalencia producto de R_1 y R_2.

Téngase en cuenta que la relación de equivalencia producto R de R_1 y R_2 no coincide con el producto cartesiano $R_1 \times R_2$ de dichas relaciones; pues bien, vamos a demostrar a continuación que, en cambio, las clases de equivalencia por la relación producto son productos cartesianos de una clase de equivalencia por R_1 y de una clase de equivalencia por R_2.

Proposición 8

Si $(a,b) \in A \times B$ entonces $\overline{(a,b)} = \bar{a} \times \bar{b}$

Demostración:

Basta observar que si (x,y) es un par ordenado arbitrario entonces se verifica:

$$[(x,y) \in (\overline{a,b})] \Leftrightarrow [((a,b),(x,y)) \in R] \Leftrightarrow [(a,x) \in R_1 \wedge (b,y) \in R_2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in \bar{a} \wedge y \in \bar{b}] \Leftrightarrow [(x,y) \in \bar{a} \times \bar{b}].$$

□ □

§2: RELACIONES DE ORDEN

Definición: Una gráfica o relación binaria R de una clase A en sí misma diremos que es un preorden en A sí y sólo sí R verifica las propiedades reflexiva y transitiva.

Diremos que R es una relación de orden parcial en A sí y sólo sí R verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Diremos que R es una relación de orden total en A sí y sólo sí R verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa.

Si R es una relación de preorden (respectivamente, orden parcial u orden total) en una clase A y B es una subclase de A, entonces la relación $R^*_{|B} = R \cap (B \times B)$ es, trivialmente, una relación de preorden (respectivamente, orden parcial u orden total) en B que denominaremos preordenación (respectivamente, ordenación parcial u ordenación total) inducida por R en B.

Asímismo, se demuestra sin dificultad que si R es una relación de preorden (respectivamente, orden parcial u orden total) en una cla-

se A entonces la relación inversa R^{-1} es un preorden (respectivamente, orden parcial u orden total) en A.

Definición: Una clase preordenada (respectivamente, parcialmente ordenada o totalmente ordenada) es un par ordenado (A,R), donde la primera componente A es una clase y la segunda componente R es una relación de preorden (respectivamente, orden parcial u orden total) en A.

Notación: Normalmente, una relación R de preorden, de orden parcial o de orden total en una clase suele representarse por el símbolo $\leq$, de tal manera que si $(x,y)\in R$ entonces notaremos $x \leq y$, que leeremos "x es menor o igual que y" (o, equivalentemente, notaremos $y \geq x$ que leeremos "y es mayor o igual que x").

Si $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$ entonces escribiremos $x < y$ y leeremos "x es estrictamente menor que y" (o,equivalentemente, y es estrictamente mayor que x, que también notaremos $y > x$).

Si $(x \leq y) \wedge (y \leq z)$ entonces notaremos $x \leq y \leq z$ y análogo con $<$.

Obsérvese que, con la nomenclatura utilizada, $\geq$ es la relación inversa de $\leq$.

Definición: Si $(A,\leq)$ es una clase preordenada entonces diremos que dos elementos x e y de la clase A son comparables sí y sólo sí $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

A continuación, vamos a demostrar que el estudio de los conjuntos preordenados se reduce al de los conjuntos parcialmente ordenados de ahí que, posteriormente, centremos nuestro estudio en las clases parcialmente ordenadas.

Proposición 1

Si (A,R) es un conjunto preordenado y consideramos $R' = \{(x,y): (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R\}$ entonces R' es una relación de equivalencia en A.

Demostración:

La reflexividad y simetría de R' son inmediatas. Si $(x,y) \in R'$ e $(y,z) \in R'$ entonces se verifica $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \wedge (y,z) \in R \wedge$ $\wedge (z,y) \in R$, por tanto de la transitividad de R deducimos $(x,z) \in R \wedge$ $\wedge (z,x) \in R$, es decir $(x,z) \in R'$.

□

Proposición 2

Si (A,R) es un conjunto preordenado, R' es la relación de equivalencia anteriormente considerada y definimos en A/R' la relación

$$R'' = \{(\bar{x},\bar{y}): (\exists x')(\exists y')(x' \in \bar{x} \wedge y' \in \bar{y} \wedge x' \; R \; y')\}$$

entonces $(A/R',R'')$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Demostración:

a) R'' es reflexiva. En efecto, si $\bar{x} \in A/R'$, entonces $x \in \bar{x} \Rightarrow x \; R' \; x \Rightarrow$ $\Rightarrow x \; R \; x$, luego $\bar{x} \; R'' \; \bar{x}$.

b) R'' es antisimétrica. En efecto, sean $\bar{x} \in A/R'$ e $\bar{y} \in A/R'$ tales que $\bar{x} \; R'' \; \bar{y}$ e $\bar{y} \; R'' \; \bar{x}$. Puesto que $\bar{x} \; R'' \; \bar{y}$ existirán $x' \in \bar{x} \wedge$ $\wedge y' \in \bar{y}$ tales que $x' \; R \; y'$, luego se verificará

$$x' \; R' \; x \wedge y' \; R' \; y \wedge x' \; R \; y'$$

Por otra parte, puesto que $\bar{y} \; R'' \; \bar{x}$ existirán elementos $y'' \in \bar{y} \wedge$ $\wedge x'' \in \bar{x}$ tales que $y'' \; R \; x'' \; y$, por tanto, $y'' \; R' \; y \wedge x'' \; R' \; x \wedge$ $\wedge y'' \; R \; x''$.

Ahora bien, de la definición de R' deducimos

$$x' \; R \; x \wedge x \; R \; x' \wedge y' \; R \; y \wedge y \; R \; y' \wedge x' \; R \; y' \wedge y'' \; R \; y \wedge y \; R \; y'' \wedge$$
$$\wedge x'' \; R \; x \wedge x \; R \; x'' \wedge y'' \; R \; x''$$

Puesto que $x \; R \; x' \wedge x' \; R \; y'$ obtenemos $x \; R \; y'$ y como, además, $y' \; R \; y$ resultará finalmente $x \; R \; y$.

Por otra parte, $y \; R \; y'' \wedge y'' \; R \; x''$ luego $y \; R \; x''$ y teniendo presente que $x'' \; R \; x$ concluimos $y \; R \; x$.

Por tanto, $x \; R \; y \wedge y \; R \; x$, es decir $x \; R' \; y$ de donde resulta $\bar{x} = \bar{y}$, lo que demuestra la antisimetría de R''.

c) R'' es transitiva en efecto, sean $\bar{x} \in A/R'$, $\bar{y} \in A/R'$, y $\bar{z} \in A/R'$, tales que $\bar{x} \; R'' \; \bar{y}$ e $\bar{y} \; R'' \; \bar{z}$. En tal situación como $\bar{x} \; R'' \; \bar{y}$ existirán $x' \in \bar{x}$ e $y' \in \bar{y}$ tales que $x' \; R \; y'$ y, por tanto

$$x' \; R' \; x \wedge y' \; R' \; y \wedge x' \; R \; y'$$

De $\bar{y} \; R'' \; \bar{z}$ deducimos la existencia de elementos $y'' \in \bar{y} \wedge z' \in \bar{z}$ tales que $y'' \; R \; z'$ y que, además, verificarán $y'' \; R' \; y \wedge z' \; R' \; z$. Así pues, de las relaciones $x' \; R \; y' \wedge y' \; R' \; y$ resultará $x' \; R \; y$, y teniendo presente que $y'' \; R' \; y \wedge y'' \; R \; z'$ concluimos $x' \; R \; z'$ con $x' \in \bar{x} \wedge z' \in \bar{z}$. Es decir, $\bar{x} \; R'' \; \bar{z}$, lo que demuestra la transitividad de R''.

Elementos notables de una clase parcialmente ordenada

Sea $(A, \leq)$ una clase parcialmente ordenada y sea B una subclase de A. En tal situación notaremos $(B, \leq)$ la clase parcialmente ordenada inducida por $(A, \leq)$ en B.

Definición: Un elemento $x \in A$ diremos que es una **cota superior** de B en $(A, \leq)$ sí y sólo sí

$$(\forall y)\,(y \in B \Rightarrow y \leq x)$$

Con frecuencia, diremos más brevemente que x es una cota superior de $(B, \leq)$ o que x es una cota superior de B si sobreentende-

mos la ordenación con la que se trabaja.

Definición: Un elemento $x \in A$ diremos que es una cota inferior de B en $(A,\leq)$ sí y sólo sí x es una cota superior de B en $(A,\geq)$ o, equivalentemente, sí y sólo sí

$$(\forall y)(y \in B \Rightarrow x \leq y)$$

Para cotas inferiores valen las mismas consideraciones que para cotas superiores, a efectos de nomenclatura.

Obsérvese que una subclase B de una clase parcialmente ordenada $(A,\leq)$ puede o no poseer cotas superiores e inferiores y, en caso de poseerlas, éstas no tienen porqué ser únicas.

Si la subclase B admite, al menos, una cota superior (respectivamente, cota inferior) en $(A,\leq)$ entonces diremos que dicha subclase está acotada superiormente (respectivamente, inferiormente) en $(A,\leq)$.

Diremos que B está acotada en $(A,\leq)$ sí y sólo sí está acotada superior e inferiormente en $(A,\leq)$.

Definición: Un elemento $x \in A$ diremos que es el supremo de B en $(A,\leq)$ sí y sólo sí verifica las siguientes condiciones:
a) x es una cota superior de B en $(A,\leq)$;
b) si y es una cota superior de B en $(A,\leq)$ entonces $x \leq y$.

Si $x \in A$ e $y \in A$ son supremos de B en $(A,\leq)$ entonces ambos elementos serán cotas superiores de B en $(A, \leq)$ luego, aplicando la condición b) al supremo x resulta $x \leq y$ y aplicándola al supremo y resulta $y \leq x$. Conclusión: $x = y$. Es decir, si la subclase B posee supremo en $(A,\leq)$ éste es único y lo notaremos $x = \sup B$.

Definición: Un elemento $x \in A$ diremos que es el ínfimo de B en $(A,\leq)$ sí y sólo sí es el supremo de B en $(A,\geq)$ o, equivalentemente, sí

y sólo sí verifica las condiciones:

a) x es una cota inferior de B en $(A,\leq)$;

b) si y es una cota inferior de B en $(A,\leq)$ entonces $y \leq x$.

De la unicidad del supremo se deduce, inmediatamente la unicidad del ínfimo de una subclase B de una clase parcialmente ordenada $(A,\leq)$ que notaremos $x = \text{ínf } B$.

Definición: Un elemento $x \in A$ diremos que es el máximo o último elemento de B en $(A,\leq)$ y notaremos $x = \text{máx } B$, sí y sólo sí $x = \sup B$ y $x \in B$.

Obsérvese que si un elemento de B es cota superior de B en $(A,\leq)$, entonces dicho elemento es el máximo de B en $(A,\leq)$.

Definición: Un elemento $x \in A$ diremos que es el mínimo o primer elemento de B en $(A,\leq)$, y notaremos $x = \text{mín } B$, sí y sólo sí x es el máximo de B en $(A,\geq)$ o, equivalentemente, sí y sólo sí $x = \text{ínf } B$ y $x \in B$.

Definición: Un elemento $x \in B$ diremos que es un elemento maximal de B en $(A,\leq)$ sí y sólo sí

$$(\forall y)\,(y \in B \wedge x \leq y \Rightarrow x = y)$$

Es decir, un elemento maximal de la subclase B en $(A,\leq)$ es un elemento de dicha subclase tal que no existe otro elemento de la subclase estrictamente mayor que él.

Obsérvese que dada una subclase de una clase parcialmente ordenada puede o no poseer elementos maximales y, en caso de poseerlos, no tienen porqué ser únicos.

Definición: Un elemento $x \in B$ diremos que es un elemento minimal de B en $(A,\leq)$ sí y sólo sí x es un elemento maximal de B en $(A,\geq)$ o, equivalentemente, sí y sólo sí

$$(\forall y)\,(y \in B \wedge y \leq x \Rightarrow y = x)$$

De las anteriores definiciones resulta inmediatamente que si una subclase B de una clase parcialmente ordenada $(A,\leq)$ posee elemento máximo (respectivamente, mínimo) en $(A,\leq)$, entonces B posee un único elemento maximal (respectivamente, minimal) en $(A,\leq)$ que es precisamente el elemento máximo (respectivamente, mínimo) de B. Ahora bien, del hecho de que B posea un único elemento maximal (respectivamente, minimal) no podemos concluir que dicho elemento sea el máximo de B en $(A,\leq)$, como veremos más adelante en un ejemplo (pág. 188).

A continuación, vamos a obtener una caracterización interesante del supremo y, por tanto, también del ínfimo para clases totalmente ordenadas.

Proposición 3

Si $(A,\leq)$ es una clase totalmente ordenada y $B \subset A$ entonces se verifica:

$$[x = \sup B] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a)\ x \text{ es cota superior de } B \text{ en } (A,\leq) \\ b)\ (\forall y)\,(y \in A \wedge y < x \Rightarrow (\exists z)\,(z \in B \wedge y < z \leq x)) \end{array}\right]$$

Demostración:

Supongamos que $x = \sup B$. Entonces, obviamente x es cota superior de B en $(A,\leq)$; además si $y \in A \wedge y < x$ entonces existe $z \in B$ tal que $y < z \leq x$ ya que, de lo contrario, al ser x cota superior de B en $(A,\leq)$ resultaría que y también sería cota superior de B verificando $y < x$, lo cual contradice que x sea el supremo de B.

Recíprocamente, sea $x \in A$ una cota superior de B en $(A,\leq)$ tal que si $y \in A \wedge y < x$ entonces existe $z \in B$ verificando $y < z \leq x$.

Sea $y \in A$ una cota superior de B en $(A, \leq)$ y veamos que $x \leq y$; en efecto, de lo contrario, puesto que $(A, \leq)$ es una clase totalmente ordenada deduciríamos $y < x$, por lo tanto existirá $z \in B$ tal que $y < z \leq x$, lo cual contradice que y sea cota superior de B.

□

Corolario

Si $(A, \leq)$ es una clase totalmente ordenada y $B \subset A$, entonces se verifica:

$$[x = \inf B] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a)\ x \text{ es cota inferior de } B \text{ en } (A, \leq) \\ b)\ (\forall y)(y \in A \wedge y > x \Rightarrow (\exists z)(z \in B \wedge y > z \geq x)) \end{bmatrix}$$

En efecto, basta tener presente que x es el ínfimo de B en $(A, \leq)$ sí y sólo sí x es el supremo de B en $(A, \geq)$.

□

Es interesante observar que la condición de ser la clase $(A, \leq)$ totalmente ordenada es esencial en la demostración, como podemos comprobar en el siguiente ejemplo.

Sean a, b, c, d conjuntos distintos entre sí y consideremos el conjunto $A = \{a,b\} \cup \{c,d\}$; la relación en A: $R = \{(a,a)(b,b)(c,c)(d,d)(a,d)(b,d)(c,d)\}$ es de orden parcial no total. Si $B = \{a,b\}$ entonces se verifica $d = \sup B \wedge c \in A \wedge c < d$ y, en cambio, no existe un elemento $x \in B$ tal que

$$c < x \leq d$$

Por tanto, las anteriores caracterizaciones del supremo e ínfimo no son válidas, en general, en clases parcialmente ordenadas.

Definición: Si $(A, \leq)$ es una clase parcialmente ordenada y $x \in A$, entonces diremos que un elemento $y \in A$ es siguiente de x en $(A, \leq)$

sí y sólo sí $x < y$ y, además, $(\forall z)(x < z \leq y \Rightarrow z = y)$.

En una clase parcialmente ordenada un elemento puede carecer de siguiente (por ejemplo, todo elemento maximal) o bien poseer más de un siguiente; en efecto: sean a,b,c conjuntos distintos y consideremos en el conjunto $A = \{a,b\} \cup \{c\}$ la relación

$$R = \{(a,a)(b,b)(c,c)(a,b)(a,c)\}.$$

En tal situación, R es una relación de orden parcial no total en A por la que los elementos b y c son siguientes de a.

En cambio, si $(A,\leq)$ es una clase totalmente ordenada y un elemento $x \in A$ posee siguiente, entonces éste es único; en efecto: si $y \in A$ e $y' \in A$ son elementos siguientes de x en $(A,\leq)$ se verificaría $x < y \wedge x < y'$ y además

$$(\forall z)(x < z \leq y \Rightarrow z = y) \wedge (\forall z)(x < z \leq y' \Rightarrow z = y').$$

Ahora bien, puesto que los elementos y e y' son comparables resulta $(y \leq y') \vee (y' \leq y)$.

Luego, si $y \leq y'$ teniendo presente que $x < y$ concluimos $y = y'$; si $y' \leq y$ entonces como $x < y'$ concluimos, igualmente, $y = y'$; de donde sigue la unicidad del elemento siguiente, si existe, en una clase totalmente ordenada.

Partes cofinales y coiniciales de una clase parcialmente ordenada.

Definición: Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada y B es una subclase de A, entonces diremos que B es cofinal de $(A,\leq)$ sí y sólo sí

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge x \leq y))$$

Téngase presente que si x es el elemento máximo de $(A,\leq)$ entonces $\{x\}$ es una parte cofinal de $(A,\leq)$; más aún, podemos precisar que toda parte cofinal de $(A,\leq)$ ha de contener el elemento x.

Definición: Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada y B es una subclase de A, entonces diremos que B es coinicial de $(A,\leq)$ sí y sólo sí B es cofinal de $(A,\geq)$ o, equivalentemente sí y sólo sí

$$(\forall x)\,(x\in A \Rightarrow (\exists y)\,(y\in B \wedge y \leq x)$$

Si x es el elemento mínimo de $(A,\leq)$ entonces $\{x\}$ es una parte coinicial de $(A,\leq)$; más aún, podemos precisar que toda parte coinicial de $(A,\leq)$ ha de contener al elemento x.

Proposición 4

Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada entonces $(A,\leq)$ posee elemento máximo (respectivamente, mínimo) sí y sólo sí existe un elemento $x\in A$ tal que $\{x\}$ sea cofinal (respectivamente, coinicial) de $(A,\leq)$.

Demostración:

Si $(A,\leq)$ posee elemento máximo y $x = \text{máx } A$ entonces $\{x\}$ es parte cofinal de $(A,\leq)$; más aún, si $y\in A$ verifica que $\{y\}$ es cofinal de $(A,\leq)$ entonces existe $z\in\{y\}$ tal que $x\leq z$, luego $x = z = y$, de donde sigue la unicidad del tal elemento x cuyo simplete es una parte cofinal de $(A,\leq)$.

Recíprocamente, sea $x\in A$ elemento tal que $\{x\}$ sea cofinal de $(A,\leq)$. Entonces para cada $y\in A$ existe $z\in\{x\}$ verificando $y\leq z$, y puesto que $z = x$ resulta, finalmente, $x = \text{máx } A$.

□

Clases filtrantes y reticuladas

Definición: Una clase parcialmente ordenada $(A,\leq)$ diremos que es filtrante superiormente (respectivamente, filtrante inferiormente) sí y sólo sí

$(\forall x)(\forall y)(x\in A \wedge y\in A \Rightarrow \{x,y\}$ está acotado superiormente (resp. inferiorm.) en $(A,\leq))$

Una clase parcialmente ordenada diremos que es filtrante sí y sólo sí es filtrante superior e inferiormente.

Ejemplo: Si A es un conjunto y en $P(A)$ consideramos la relación de inclusión entonces $(P(A),\subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado, en general, no totalmente ordenado tal que es filtrante, ya que si $B\in P(A)$ y $C\in P(A)$ entonces $B\cap C$ es una cota inferior de $\{B,C\}$ en $(P(A),\subset)$ y $B\cup C$ es una cota superior de $\{B,C\}$ en $(P(A),\subset)$.

Trivialmente, toda clase totalmente ordenada es filtrante.

Definición: Una clase parcialmente ordenada $(A,\leq)$ diremos que está reticulada superiormente o es un retículo superior (respectivamente, reticulada inferiormente) sí y sólo sí

$(\forall x)(\forall y)(x\in A \wedge y\in A \Rightarrow \{x,y\}$ posee supremo (respect. ínfimo) en $(A,\leq))$

Una clase parcialmente ordenada diremos que está reticulada o es un retículo sí y sólo sí está reticulada superior o inferiormente.

De estas definiciones se deduce inmediatamente que toda clase reticulada superiormente (respectivamente, inferiormente) es filtrante superiormente (respectivamente, inferiormente); el recíproco, en cambio, es falso, en general; en efecto, sean a,b,c,d,e conjuntos distintos y consideremos en $A = \{a,b\}\cup\{c,d\}\cup\{e\}$ la siguiente relación

$R = \{(a,a)(b,b)(c,c)(d,d)(e,e)(a,c)(a,d)(a,e)(b,c)(b,d)(b,e)(c,e)(d,e)\}$.

En tal situación (A,R) es un conjunto filtrante superiormente, como se comprueba sin dificultad, y, en cambio no es un retículo superior ya que los elementos c,d,e son cotas superiores de $\{a,b\}$ en (A,R) y, en cambio, $\{a,b\}$ carece de supremo en (A,R).

Un ejemplo de conjunto reticulado es $(P(A),\subset)$, siendo A un conjunto y $\subset$ la relación de inclusión en $P(A)$ ya que si $B \in P(A)$ y $C \in P(A)$ entonces $B \cap C = \inf\{B,C\}$ y $B \cup C = \sup\{B,C\}$.

Proposición 5

Si $(A,\leq)$ es una clase filtrante superiormente (respectivamente, inferiormente) y x es un elemento maximal (respectivamente, minimal) de $(A,\leq)$, entonces x es el elemento máximo (respectivamente, mínimo) de $(A,\leq)$.

Demostración:

Sea y un elemento arbitrario de A. Puesto que $(A,\leq)$ es filtrante superiormente existirá una cota superior $z \in A$ de $\{x,y\}$ en $(A,\leq)$; ahora bien, al ser x elemento maximal deducimos $x = z$. Por tanto $y \leq x$, es decir, $x = \max A$.

□

Proposición 6

Si $(A,\leq)$ es una clase filtrante superiormente (respectivamente, inferiormente) y B es una parte cofinal (respectivamente, coinicial) de $(A,\leq)$, entonces $(B,\leq)$ es una clase filtrante superiormente (respectivamente, inferiormente) por la ordenación inducida.

Demostración:

Si $x \in B$ e $y \in B$ entonces, puesto que $B \subset A$, se verificará $x \in A$ e $y \in A$ y por ser $(A,\leq)$ una clase filtrante superiormente existirá un elemento $z \in A$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$; ahora bien, teniendo presente que $z \in A$ y que B es parte cofinal de $(A,\leq)$ deducimos la existencia de un elemento $t \in B$ tal que $z \leq t$, elemento que será una cota superior de $\{x,y\}$ en $(B,\leq)$; es decir, $(B,\leq)$ es una clase filtrante superiormente.

□

Proposición 7

Si $(A,\leq)$ es una clase filtrante superiormente (respectivamente, inferiormente) y B es una subclase de A, entonces o B es cofinal (respectivamente, coinicial) de $(A,\leq)$ o $A - B$ es cofinal (respectivamente, coinicial) de $(A,\leq)$.

Demostración:

Si $(A,\leq)$ es filtrante superiormente y B no es parte cofinal de $(A,\leq)$ entonces existe un elemento $x \in A$ tal que, para cada $y \in B$, la relación $x \leq y$ es falsa; veamos que $A - B$ es cofinal de $(A,\leq)$; en efecto, si $z \in A$ entonces al ser $(A,\leq)$ filtrante superiormente existirá un elemento $t \in A$ tal que $z \leq t \wedge x \leq t$, por tanto $t \notin B$, es decir $t \in A - B$.

□

Intervalos de una clase parcialmente ordenada

Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada y $a \in A$, $b \in A$ son elementos tales que $a \leq b$, entonces definimos:

a) Intervalo cerrado de extremos a y b, que notaremos $[a,b]$, es la clase

$$[a,b] = \{x: \ x \in A \ \wedge \ a \leq x \leq b\}$$

b) Intervalo abierto de extremos a y b, que notaremos $]a,b[$, es la clase

$$]a,b[= \{x: \ x \in A \ \wedge \ a < x < b\}$$

c) Intervalo abierto a la izquierda y cerrado a la derecha de extremos a y b, que notaremos $]a,b]$, es la clase

$$]a,b] = \{x: \ x \in A \ \wedge \ a < x \leq b\}$$

d) Intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha de extremos a y b, que notaremos $[a,b[$, es la clase

$$[a,b[= \{x: \ x \in A \ \wedge \ a \leq x < b\}$$

e) Intervalo cerrado a la izquierda e ilimitado a la derecha de extremo a, que notaremos $[a,\rightarrow[$, es la clase

$$[a,\rightarrow[= \{x: \ x \in A \ \wedge \ a \leq x\}$$

f) Intervalo abierto a la izquierda e ilimitado a la derecha de extremo a, que notaremos $]a,\rightarrow[$, es la clase

$$]a,\rightarrow[= \{x: \ x \in A \ \wedge \ a < x\}$$

g) Intervalo cerrado a la derecha e ilimitado a la izquierda de extremo a, que notaremos $]\leftarrow,a]$, es la clase

$$]\leftarrow,a] = \{x: \ x \in A \ \wedge \ x \leq a\}$$

h) Intervalo abierto a la derecha e ilimitado a la izquierda de extremo a, que notaremos $]\leftarrow,a[$, es la clase

$$]\leftarrow,a[= \{x: \ x \in A \ \wedge \ x < a\}$$

i) Intervalo ilimitado a la izquierda y a la derecha, que notaremos $]\leftarrow,\rightarrow[$, es la clase

$$]\leftarrow,\rightarrow[= A$$

□

Proposición 8

Si $(A,\leq)$ es una clase reticulada, entonces la intersección de dos intervalos de $(A,\leq)$ es un intervalo de $(A,\leq)$.

Demostración:

Vamos a demostrar la proposición para dos intervalos cerrados, en los restantes casos es análoga.

Sean $[a,b]$ y $[a',b']$ dos intervalos cerrado de $(A,\leq)$, notemos $a'' = \sup\{a,a'\}$ y $b'' = \inf\{b,b'\}$. Si la relación $a'' \leq b''$ es falsa entonces $[a,b]\cap[a',b'] = \emptyset$ y, por tanto, dicha intersección será un intervalo de $(A,\leq)$; si, en cambio, $a''\leq b''$ entonces $[a,b]\cap[a',b'] = [a'',b'']$ ya que

$$(x\in[a,b]\cap[a',b']) \Leftrightarrow (x\in A \wedge a\leq x\leq b \wedge a'\leq x\leq b') \Leftrightarrow (x\in A \wedge a''\leq x\leq b'')$$

□

Segmentos de una clase parcialmente ordenada

Definición: Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada y B es una subclase de A, entonces diremos que B es un segmento de $(A,\leq)$ sí y sólo sí $(\forall x)(\forall y)(x\in A \wedge y\in B \wedge x\leq y \Rightarrow x\in B)$

De esta definición resulta inmediatamente que:

a) la reunión e intersección de dos segmentos de una clase parcialmente ordenada es un segmento.

b) la reunión e intersección de una familia arbitraria de subconjuntos de una clase parcialmente ordenada, que sean segmentos de la clase, es un segmento.

c) las clases $\emptyset$ y A son segmentos de $(A,\leq)$.

d) los intervalos abiertos o cerrados a la derecha e ilimitado a la izquierda son segmentos de $(A, \leq)$.

Proposición 9

Si $(A, \leq)$ es una clase parcialmente ordenada, B es un segmento de $(A, \leq)$ y C es una subclase de B entonces, C es segmento de $(A, \leq)$ sí y sólo sí C es segmento de $(B, \leq)$.

Demostración:

Supongamos que C es un segmento de $(A, \leq)$. Puesto que $B \subset A$ deducimos, obviamente, que C es un segmento de $(B, \leq)$.

Recíprocamente, si C es un segmento de $(B, \leq)$ consideremos $x \in A$ e $y \in C$ tales que $x \leq y$. Teniendo presente que $y \in C \subset B$ y que B es un segmento de $(A, \leq)$ se verificará $x \in B$; ahora bien, al ser C un segmento de $(B, \leq)$, $x \in B \wedge y \in C \wedge x \leq y$ concluimos que $x \in C$, por tanto C es un segmento de $(A, \leq)$.

□

Morfismos de orden entre clases parcialmente ordenadas

En lo que sigue, cuando consideremos dos clases parcialmente ordenadas $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ supondremos que las respectivas ordenaciones (salvo que explicitemos lo contrario) son arbitrarias en las respectivas clases, aunque las representemos con el mismo símbolo.

Definición: Si $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ son dos clases parcialmente ordenadas, entonces diremos que una gráfica G de A en B es un morfismo de orden de $(A, \leq)$ en $(B, \leq)$ sí y sólo sí verifica las condiciones:

a) G es una gráfica funcional.
b) dom G = A.

c) $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \Rightarrow G(x) \leq G(y))$ donde $G(x)$ y $G(y)$ representan los homólogos de x e y, respectivamente, por G.

Además, diremos que un morfismo de orden es inyectivo, epiyectivo o biyectivo sí y sólo sí la gráfica que lo determina es inyectiva, epiyectiva o biyectiva, respectivamente.

Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada entonces Δ_A es un morfismo de orden biyectivo de $(A,\leq)$ en $(A,\leq)$.

Es interesante observar que si G es un morfismo de orden biyectivo de la clase $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$, entonces G^{-1} será una gráfica biyectiva de B en A pero, en general, no podemos asegurar que G^{-1} sea un morfismo de orden de $(B,\leq)$ en $(A,\leq)$, como lo prueba el siguiente ejemplo: sean a y b conjuntos distintos y en el conjunto $A = \{a,b\}$ consideremos las ordenaciones parciales

$$\leq_1 = \Delta_A \qquad \text{y} \qquad \leq_2 = \{(a,a)(b,b)(a,b)\} .$$

En tal situación, la gráfica Δ_A de A en A es un morfismo de orden biyectivo de $(A,\leq_1)$ en $(A,\leq_2)$, en cambio $\Delta_A^{-1}=\Delta_A$, aún siendo una gráfica biyectiva de A en A, no es un morfismo de orden de $(A,\leq_2)$ en $(A,\leq_1)$ ya que $a <_2 b$ y, en cambio, la relación $\Delta_A(a) \leq_1 \leq_1 \Delta_A(b)$ es falsa. Pues bien, a continuación vamos a proporcionar una condición suficiente para que la inversa de un morfismo de orden biyectivo sea un morfismo de orden biyectivo.

Proposición 10

Si $(A,\leq)$ es una clase totalmente ordenada, $(B,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada y G es un morfismo de orden biyectivo de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$, entonces G^{-1} es un morfismo de orden biyectivo de $(B,\leq)$ en $(A,\leq)$.

Demostración:

Todo se reduce a demostrar que G^{-1} es un morfismo de orden de $(B,\leq)$ en $(A,\leq)$. Supongamos lo contrario, es decir que existan elementos $x\in B$ y $x'\in B$ tales que $x < x'$ y, en cambio, fuese falsa la relación $G^{-1}(x) \leq G^{-1}(x')$; puesto que $(A,\leq)$ es una clase totalmente ordenada, de la última relación deduciríamos que $G^{-1}(x) > G^{-1}(x')$. Por tanto, si notamos $y = G^{-1}(x) \wedge y' = G^{-1}(x')$ y teniendo presente que $y\in A$, $y'\in A$ e $y > y'$ resultaría $G(y) \geq G(y')$. Es decir $x \geq x'$, lo cual contradice que $x < x'$.

□

Definición: Un isomorfismo de orden u orden isomorfismo de una clase parcialmente ordenada $(A,\leq)$ en una clase parcialmente ordenada $(B,\leq)$ es un morfismo de orden biyectivo G de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ tal que G^{-1} es un morfismo de orden biyectivo de $(B,\leq)$ en $(A,\leq)$. En tal caso, diremos que la clase $(A,\leq)$ es orden isomorfa a la clase $(B,\leq)$.

De la proposición anterior resulta, trivialmente, que entre clases totalmente ordenadas un morfismo de orden es isomorfismo de orden sí y sólo sí es biyectivo.

Proposición 11

Si $(A,\leq_1)$, $(B,\leq_2)$ y $(C,\leq_3)$ son clases parcialmente ordenadas, entonces se verifica:

a) $(A,\leq_1)$ es orden isomorfa a $(A,\leq_1)$.

b) Si $(A,\leq_1)$ es orden isomorfa a $(B,\leq_2)$ entonces $(B,\leq_2)$ es orden isomorfa a $(A,\leq_1)$.

c) Si $(A,\leq_1)$ es orden isomorfa a $(B,\leq_2)$ y $(B,\leq_2)$ es orden isomorfa a $(C,\leq_3)$, entonces $(A,\leq_1)$ es orden isomorfa a $(C,\leq_3)$.

Demostración:

Los apartados a) y b) se deducen, respectivamente, de que Δ_A es un orden isomorfismo de $(A,\leq_1)$ en $(A,\leq_1)$ y de que la gráfica inversa de un isomorfismo de orden es un isomorfismo de orden.

Para demostrar el apartado c) es suficiente probar que la composición de morfismos de orden es un morfismo de orden. Sea G un morfismo de orden de $(A,\leq_1)$ en $(B,\leq_2)$ y G' un morfismo de orden de $(B,\leq_2)$ en $(C,\leq_3)$, consideremos $x\in A$ e $y\in A$ tales que $x<_1 y$. En tal situación, $G(x)\leq_2 G(y)$ y, por tanto, $G'[G(x)]\leq_3 G'[G(y)]$, es decir, $(G'\circ G)(x)\leq_3 (G'\circ G)(y)$.

□

Con otras palabras, la proposición anterior nos asegura que, en la clase cuyos elementos son los conjuntos parcialmente ordenados la relación "ser orden isomorfos" es de equivalencia en dicha clase.

A continuación, vamos a estudiar una serie de proposiciones que nos permitirán asegurar que las propiedades específicas de una relación de orden puede "transportarse" mediante los isomorfismos de orden.

Proposición 12

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son clases parcialmente ordenadas orden isomorfas y, además, $(A,\leq)$ es totalmente ordenada, entonces $(B,\leq)$ es totalmente ordenada.

Demostración:

Sea G un orden isomorfismo de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ y consideremos $x\in B \wedge x'\in B$. Puesto que $G^{-1}(x)\in A$ y $G^{-1}(x')\in A$ de la hipótesis de que $(A,\leq)$ es totalmente ordenada deducimos

$$[G^{-1}(x) \leq G^{-1}(x')] \quad \vee \quad [G^{-1}(x') \leq G^{-1}(x)]$$

y, al ser G un morfismo de orden biyectivo de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$, concluimos $(x \leq x') \vee (x' \leq x)$.

□

Proposición 13

Sean $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ clases parcialmente ordenadas orden isomorfas. Sea G un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$. Sea $A' \subset A$ y notemos $G(A') = \{y: (\exists z)(z \in A' \wedge (z,y) \in G)\}$. En tal situación, se verifican las relaciones siguientes:

a) Si x es una cota superior (respectivamente, inferior) de A' en $(A,\leq)$ entonces $G(x)$ es una cota superior (respectivamente, inferior) de $G(A')$ en $(B,\leq)$.

b) Si $x = \sup A'$ (respectivamente, $x = \inf A'$) entonces $G(x) = \sup G(A')$ (respectivamente, $G(x) = \inf G(A')$).

c) Si $x = \max A'$ (respectivamente, $x = \min A'$) entonces $G(x) = \max G(A')$ (respectivamente, $G(x) = \min G(A')$).

d) Si x es un elemento maximal (respectivamente, minimal) de A' en $(A,\leq)$ entonces $G(x)$ es un elemento maximal (respectivamente, minimal) de $G(A')$ en $(B,\leq)$.

e) Si A' es un segmento de $(A,\leq)$ entonces $G(A')$ es un segmento de $(B,\leq)$.

f) Si A' es cofinal (respectivamente, coinicial) de $(A,\leq)$ entonces $G(A')$ es cofinal (respectivamente, coinicial) de $(B,\leq)$.

Demostración

a) Si $y \in G(A')$ entonces existe $z \in A'$ tal que $G(z) = y$. Puesto

que x es cota superior de A' en $(A,\leq)$ se verificará $z \leq x$ y, por tanto, $G(z) = y \leq G(x)$.

b) Si $x = \sup A'$, del apartado anterior deducimos que $G(x)$ es cota superior de $G(A')$ en $(B,\leq)$. Sea $y \in B$ una cota superior de $G(A')$ en $(B,\leq)$. Puesto que G^{-1} es un isomorfismo de orden de $(B,\leq)$ en $(A,\leq)$, aplicando a) y teniendo presente que $(G^{-1} \circ G)(A') = A'$ resultará que $G^{-1}(y)$ es una cota superior de A' en $(A,\leq)$. Por tanto $x \leq G^{-1}(y)$, de donde deducimos $G(x) \leq y$. Es decir, $y = \sup G(A')$.

c) Si $x = \max A'$ entonces $x = \sup A'$ y $x \in A'$, luego $G(x) = \sup G(A')$ y $G(x) \in G(A')$. Por tanto $G(x) = \max G(A')$.

d) Si x es un elemento maximal de A' en $(A,\leq)$ y $z \in G(A')$ es un elemento tal que $G(x) \leq z$ entonces $x \leq G^{-1}(z)$. Por tanto $x = G^{-1}(z)$, es decir, $G(x) = z$; luego $G(x)$ es un elemento maximal de $G(A')$ en $(B,\leq)$.

e) Sean $y \in B$ y $z \in G(A')$ elementos tales que $y \leq z$. Entonces $G^{-1}(y) \leq G^{-1}(z)$ y teniendo presente que $G^{-1}(z) \in A'$ y que A' es un segmento de $(A,\leq)$ deducimos $G^{-1}(y) \in A'$. Por tanto $y \in G(A')$, luego $G(A')$ es un segmento de $(B,\leq)$.

f) Supongamos que A' es cofinal de $(A,\leq)$ y sea $x \in B$. Entonces $G^{-1}(x) \in A$, por tanto existirá un elemento $y \in A'$ tal que $G^{-1}(x) \leq y$, de donde resultará $x \leq G(y) \in G(A')$. Es decir, $G(A')$ es cofinal de $(B,\leq)$.

□

Proposición 14

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son clases parcialmente ordenadas orden isomorfas y, además, $(A,\leq)$ es filtrante superiormente (respectivamente,

inferiormente), entonces $(B,\leq)$ es filtrante superiormente (respectivamente, inferiormente).

Demostración:

Sea G un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$, sean $x\in B$ $x'\in B$ y notemos $G^{-1}(x) = y \wedge G^{-1}(x') = y'$. En tal situación, existe $z\in A$ tal que $y\leq z \wedge y'\leq z$, de donde resultará $x = G(y) \leq G(z)\in B$ y $x' = G(y') \leq G(z)\in B$. Luego $(B,\leq)$ es filtrante superiormente.

□

Proposición 15

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son clases parcialmente ordenadas orden isomorfas y $(A,\leq)$ está reticulada superiormente (respectivamente, inferiormente), entonces $(B,\leq)$ está reticulada superiormente (respectivamente, inferiormente).

Demostración:

Sea G un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$, sean $x\in B$, $x'\in B$ y notemos $G^{-1}(x) = y$, $G^{-1}(x') = y'$. Entonces basta tener presente que si $z = \sup\{y,y'\}$ resulta $G(z) = \sup\{G(y),G(y')\}$.

□

Aplicaciones crecientes y decrecientes entre conjuntos parcialmente ordenados

Definición: Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos parcialmente ordenados y $f = (G,A,B)$ es una aplicación de A en B, entonces diremos que f es creciente (respectivamente, estrictamente creciente) de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ sí y sólo sí

$$(\forall x)(\forall y)(x\in A \wedge y\in A \wedge x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{(respectivamente, } f(x)<f(y))$$

Diremos que f es <u>decreciente</u> (respectivamente, estrictamente decreciente) de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ sí y sólo sí

$$(\forall x)(\forall y)(x\in A \wedge y\in A \wedge x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\text{resp. } f(x) > f(y))$$

Diremos que f es <u>monótona</u> (respectivamente, estrictamente monótona) de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ sí y sólo sí f es creciente o decreciente (respectivamente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente) de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$.

Como consecuencia inmediata de las anteriores definiciones resultan las consideraciones siguientes:

a) Una aplicación $f = (G,A,B)$ es creciente de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ sí y sólo sí G es un morfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$; de ahí que, con frecuencia, a las aplicaciones crecientes entre conjuntos parcialmente ordenados se les denomine morfismos de orden entre dichos conjuntos.
   Si G es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ entonces diremos que la aplicación $f = (G,A,B)$ es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$.

b) Toda aplicación estrictamente creciente (respectivamente, estrictamente decreciente) es creciente (respectivamente, decreciente).

c) Toda aplicación estrictamente monótona es monótona.

d) Toda aplicación creciente (respectivamente, decreciente o monótona) e inyectiva es estrictamente creciente (respectivamente, estrictamente decreciente o estrictamente monótona).
   Obsérvese que, en cambio, una aplicación estrictamente creciente o estrictamente decreciente entre conjuntos parcialmente ordenados no tiene porqué ser inyectiva; lo será sí y sólo sí el primero de los conjuntos entre los que se establece la aplicación es totalmente ordenado.

e) Una aplicación biyectiva $f = (G,A,B)$ es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ sí y sólo sí

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)))$$

f) Si $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y $(B,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces una aplicación $f = (G,A,B)$ es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ sí y sólo sí f es epiyectiva y estrictamente creciente de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$.

Ordenaciones "transportadas" por una aplicación biyectiva

Pretendemos ahora abordar la siguiente cuestión: dados dos conjuntos A y B, una relación de orden parcial o total en A y una aplicación biyectiva f de A en B ¿será posible transportar dicha ordenación a B a través de f, de tal forma que f sea un isomorfismo de orden entre los respectivos conjuntos ordenados?. Veamos, a continuación, que podemos responder afirmativamente a dicha cuestión.

Proposición 16

Sea $(A,\leq_1)$ un conjunto parcialmente ordenado (respectivamente, totalmente ordenado) y f una aplicación biyectiva de A en un conjunto B. En tal situación la relación $\leq_2$ definida en B así:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in B \wedge y \in B \Rightarrow (x \leq_2 y \Leftrightarrow f^{-1}(x) \leq_1 f^{-1}(y)))$$

dota a B de estructura de conjunto parcialmente ordenado (respectivamente, totalmente ordenado); y además f es un isomorfismo de orden de $(A,\leq_1)$ en $(B,\leq_2)$.

Demostración:

La reflexividad de $\leq_2$ en B es consecuencia inmediata de la re

flexividad de $\leq_1$ en A. Si $x \in B \wedge y \in B$ verifican $(x \leq_2 y) \wedge (y \leq_2 x)$ entonces $f^{-1}(x) \leq_1 f^{-1}(y) \wedge f^{-1}(y) \leq_1 f^{-1}(x)$. Por tanto $f^{-1}(y) = f^{-1}(x)$ es decir, $y = x$ ya que f es biyectiva. Luego $\leq_2$ es antisimétrica en B.

Si $x \in B \wedge y \in B \wedge z \in B$ verifican $(x \leq_2 y) \wedge (y \leq_2 z)$ entonces $f^{-1}(x) \leq_1 f^{-1}(y) \wedge f^{-1}(y) \leq_1 f^{-1}(z)$. De la transitividad de $\leq_1$ en A deducimos $f^{-1}(x) \leq_1 f^{-1}(z)$ y, por tanto, $x \leq_2 z$. Es decir, $\leq_2$ es transitiva en B.

Supongamos finalmente que $\leq_1$ es conexa en A y sean $x \in B, y \in B$. Entonces $f^{-1}(x) \in A$ y $f^{-1}(y) \in A$, luego $[f^{-1}(x) \leq_1 f^{-1}(y)] \vee [f^{-1}(y) \leq_1 f^{-1}(x)]$ de donde resultará $(x \leq_2 y) \vee (y \leq_2 x)$. Es decir, $\leq_2$ es conexa en B.

Además, que f sea un isomorfismo de orden de $(A, \leq_1)$ en $(B, \leq_2)$ es consecuencia inmediata de la biyectividad de f y de la definición de la ordenación $\leq_2$ en B.

□ □

§3. CONJUNTOS ORDENADOS DENSOS Y CONTINUOS

Definición: Si $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces diremos que un par ordenado (B,C) es una cortadura de $(A, \leq)$ sí y sólo sí verifica las condiciones siguientes:

a) $\{B, C\}$ constituye una partición de A.

b) $(\forall x)(\forall y)(x \in B \wedge y \in C \Rightarrow x < y)$

Ejemplo: Si $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y x es un elemento de A, distinto del mínimo, entonces el par ordenado $(]\leftarrow, x[, [x, \rightarrow[)$ es una cortadura de $(A, \leq)$.

Definición: Si $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces diremos que una cortadura (B,C) de $(A,\leq)$ determina salto sí y sólo sí B posee máximo en $(A,\leq)$ y C posee mínimo en $(A,\leq)$.

Diremos que una cortadura (B,C) de $(A,\leq)$ posee elemento de separación sí y sólo sí, o bien B posee máximo en $(A,\leq)$ y C no posee mínimo en $(A,\leq)$, o bien B no posee máximo en $(A,\leq)$ y C posee mínimo en $(A,\leq)$. En tal situación, al elemento máximo de B (en el primer caso) o al elemento mínimo de C (en el segundo caso) lo denominaremos elemento de separación de la cortadura (B,C) de $(A,\leq)$.

Diremos que una cortadura (B,C) de $(A,\leq)$ determina laguna sí y sólo sí B carece de máximo en $(A,\leq)$ y C carece de mínimo en $(A,\leq)$.

Diremos que un conjunto totalmente ordenado es denso sí y sólo sí no posee cortaduras que determinen salto.

Diremos que un conjunto totalmente ordenado es continuo sí y sólo sí toda cortadura tiene un elemento de separación.

Proposición 1

Un conjuntc totalmente ordenado $(A,\leq)$ es denso sí y sólo sí para cada par de elementos $x\in A$ e $y\in A$ tales que $x<y$ existe, al menos, un elemento $z\in A$ tal que $x<z<y$.

Demostración:

Supongamos que $(A,\leq)$ es denso y, en cambio, existen elementos $x\in A \wedge y\in A$ tales que $x<y$ y que para cada $z\in A$ la relación $x<z<y$ es falsa. Consideremos entonces

$$B = \{z: z\in A \wedge z\leq x\} \quad \wedge \quad C = \{z: z\in A \wedge z\geq y\}$$

Trivialmente, (B,C) es una cortadura de $(A,\leq)$ que determina salto: contradicción.

Recíprocamente, supongamos que $(A,\leq)$ no fuera denso. Entonces existiría una cortadura (B,C) de $(A,\leq)$ tal que determina salto: no temos $x = \text{máx } B$ e $y = \text{mín } C$. En tal caso, para cada $z \in A$ la relación $x < z < y$ es falsa.

□

Definición: Si $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y $B \subset A$, entonces diremos que B es denso en $(A,\leq)$ sí y sólo sí para cada par de elementos $x \in A$ e $y \in A$ tales que $x < y$ existe, al menos, un elemento $z \in B$ tal que $x < z < y$.

De esta definición resulta inmediatamente que si un conjunto totalmente ordenado $(A,\leq)$ posee, al menos, un subconjunto denso en él entonces $(A,\leq)$ es denso.

Teorema 1

Un conjunto totalmente ordenado $(A,\leq)$ es continuo sí y sólo sí es denso y, además, todo subconjunto no vacío acotado superiormente en $(A,\leq)$ posee supremo en $(A,\leq)$.

Demostración:

Trivialmente, todo conjunto totalmente ordenado y continuo es denso. Sea entonces B un subconjunto no vacío de A acotado superiormente en $(A,\leq)$. Si B posee un único elemento entonces dicho elemento será el supremo de B; en caso contrario consideremos el conjunto

$$C = \{x: \ x \text{ es cota superior de } B \text{ en } (A,\leq)\}$$

y notemos $D = A - C$. Puesto que B está acotado superiormente y posee más de un elemento resultará $C \neq \emptyset$ y $C \neq A$. Además si $x \in D$ e $y \in C$

entonces x no es cota superior de B en $(A,\leq)$, por tanto existirá un elemento $z \in B$ tal que $x < z \leq y$.

Conclusión: el par ordenado (D,C) es una cortadura de $(A,\leq)$, y como por hipótesis $(A,\leq)$ es continuo, deducimos que dicha cortadura posee un elemento de separación, que notaremos por $a \in A$.

Si fuese $a = \max D$ entonces existe $x \in B$ tal que $a < x$ y, teniendo presente que $(A,\leq)$ es denso, existirá un elemento $y \in A$ tal que $a < y < x$. En tal situación se verificará $a = \max D \wedge a < y \wedge D \cup C = A$ de donde concluimos que $y \in C$, lo que es una contradicción ya que $y < x \in B$. Por tanto resultará $a = \min C$, es decir $a = \sup B$.

Recíprocamente, supongamos que $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado denso tal que todo subconjunto no vacío de A posee supremo en $(A,\leq)$. Consideremos una cortadura (B,C) de $(A,\leq)$. Puesto que B es un subconjunto no vacío de A acotado superiormente en $(A,\leq)$ por cualquier elemento de C, existirá $b = \sup B$. Si $b \in B$ entonces $b = \max B$ y si $b \notin B$ entonces $b = \min C$; por tanto, teniendo presente que, al ser $(A,\leq)$ denso, ninguna cortadura determina salto concluimos que el elemento b es de separación de la cortadura (B,C) de $(A,\leq)$. □

Finalizaremos el presente parágrafo demostrando que todo conjunto totalmente ordenado $(A,\leq)$ puede sumergirse en un conjunto totalmente ordenado continuo $(\bar{A},\leq_1)$, en el sentido de que $A \subset \bar{A}$ y la ordenación inducida por $\leq_1$ en A es $\leq$.

Teorema 2

Si $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y denso entonces, existe un conjunto totalmente ordenado y continuo $(\bar{A},\leq_1)$ tal que $A \subset \bar{A}$ y $\leq_1|_A = \leq$

Demostración:

Si $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y continuo, entonces basta considerar $A=\bar{A}$ y $\leq_1 = \leq$.

Si $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado no continuo entonces existirá, al menos, una cortadura de $(A,\leq)$ que determina laguna, pues $(A,\leq)$ es denso. Por tanto, el conjunto

$$L = \{(B,C):\ (B,C) \text{ es cortadura de } (A,\leq) \text{ que determina laguna}\}$$

es no vacío.

Definimos $\bar{A} = A \cup L$ y consideramos en $\bar{A}$ la siguiente relación:

Si $x\in A \wedge y\in A$ entonces $x \leq_1 y \Leftrightarrow x \leq y$

Si $x\in A \wedge y\in L$ entonces $x \leq_1 y \Leftrightarrow x\in B$ siendo $y = (B,C)$

Si $x\in L \wedge y\in A$ entonces $x \leq_1 y \Leftrightarrow y\in C$ siendo $x = (B,C)$

Si $x\in L \wedge y\in L$ entonces $x \leq_1 y \Leftrightarrow B\subset B'$ siendo $x = (B,C)$ e $y = (B',C')$

Se comprueba sin dificultad que el conjunto $(\bar{A},\leq_1)$ es totalmente ordenado y, trivialmente, $\leq_1$ induce sobre A la ordenación $\leq$.

Lema 1.- A es denso en $(\bar{A},\leq_1)$.

En efecto: consideremos dos elementos $x\in \bar{A} \wedge y\in \bar{A}$ tales que $x <_1 y$.

Si $x\in A$ e $y\in A$ entonces debido a la densidad de $(A,\leq)$ existirá un elemento $z\in A$ tal que $x <_1 z <_1 y$.

Si $x\in A$ e $y\in L$ entonces $y = (B,C)$ es una cortadura de $(A,\leq)$ que determina laguna y, puesto que $x \leq_1 y$, resultará $x\in B$. Ahora bien, al determinar laguna la cortadura (B,C) el conjunto B carece

rá de máximo en $(A,\leq)$, por tanto existirá un elemento $z \in B$ tal que $x < z$ y recordando que $z <_1 y$ concluimos $x <_1 z <_1 y$.

Si $x \in L$ e $y \in A$ y notamos $x = (B,C)$ entonces $x <_1 y \Rightarrow y \in C$. Teniendo presente que (B,C) determina laguna, el conjunto C carece de elemento mínimo, por tanto, existirá un elemento $z \in C$ tal que $z < y$. Puesto que $x <_1 z$ concluimos $x <_1 z <_1 y$.

Finalmente, si $x \in L$ e $y \in L$ y notamos $x = (B,C) \wedge y = (B',C')$ entonces $x <_1 y \Rightarrow B \subsetneq B'$. Luego si $z \in B' - B$ verificará $x <_1 z <_1 y$, por tanto A es denso en $(\bar{A},\leq_1)$. □

Lema 2.- $(\bar{A},\leq_1)$ es un conjunto totalmente ordenado y continuo.

En efecto: puesto que A es denso en $(\bar{A},\leq_1)$ deducimos que el conjunto totalmente ordenado $(\bar{A},\leq_1)$ es denso, luego ninguna cortadura de $(\bar{A},\leq_1)$ determinará salto y, por tanto, demostrar que $(\bar{A},\leq_1)$, es continuo se reduce a probar que ninguna cortadura de $(\bar{A},\leq_1)$ determina laguna.

Supongamos lo contrario, es decir que exista una cortadura $(\mathcal{B},C)$ de $(\bar{A},\leq_1)$ que determine laguna, y notemos $B = \mathcal{B} \cap A \wedge C = C \cap A$.

Veamos que (B,C) es una cortadura de $(A,\leq)$. En efecto, si $x \in \mathcal{B}$ entonces o bien $x \in A$ en cuyo caso $x \in B$, o bien $x = (B',C')$ y en tal caso, si consideramos $y \in B'$ verificará $y \leq x$ luego $y \in \mathcal{B} \cap A = B$, es decir $B \neq \emptyset$. Análogamente se demuestra que $C \neq \emptyset$. Además si $x \in B$ e $y \in C$ entonces $x \in \mathcal{B}$ e $y \in C$ por tanto $x \leq_1 y$, luego $x \leq y$.

Veamos ahora que la cortadura (B,C) determina laguna. En efecto si $a \in B$, teniendo presente que $B \subset \mathcal{B}$ y que $(\mathcal{B},C)$ determina laguna deducimos que $a \neq \max \mathcal{B}$. Sea, entonces, $x \in \mathcal{B}$ tal que $a <_1 x$; puesto que A es denso en $(\bar{A},\leq_1)$ existirá $y \in A$ verificando

$a <_1 y <_1 x$, lo que implica $y \in \mathcal{B}$. Luego B carece de elemento máximo ya que $y \in \mathcal{B} \cap A = B$. Análogamente se razona para demostrar que C carece de elemento mínimo. Así pues $(B,C) \in \bar{A}$, por tanto, o bien $(B,C) \in \mathcal{B}$ o bien, $(B,C) \in \mathcal{C}$.

Si $(B,C) \in \mathcal{B}$ entonces $(B,C) \neq \max \mathcal{B}$, luego existirá $x \in \mathcal{B}$ tal que $(B,C) <_1 x$; de la densidad de A en $(\bar{A}, \leq_1)$ deducimos la existencia de un elemento $y \in A$ tal que $(B,C) <_1 y <_1 x$. Ahora bien

$$(y <_1 x) \wedge (x \in \mathcal{B}) \Rightarrow (y \in \mathcal{B}),$$

por tanto $y \in \mathcal{B} \cap A = B$. Pero de la relación $(B,C) <_1 y$ concluimos $y \in C$. En consecuencia $y \in B \cap C = \emptyset$, lo que es una contradicción. Análogamente llegamos a una contradicción bajo el supuesto $(B,C) \in \mathcal{C}$.

Conclusión final: no puede existir una cortadura $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ de $(\bar{A}, \leq_1)$ que determine laguna; por tanto, recordando que $(\bar{A}, \leq_1)$ es un conjunto totalmente ordenado y denso, concluimos que es continuo lo cual completa la demostración del lema 2 y, por tanto, del teorema.

□ □

§4. CLASES BIEN ORDENADAS

La idea intuitiva del concepto de clase bien ordenada $(A, \leq)$ responde al de clase parcialmente ordenada tal que "toda subclase no vacía de A posea elemento mínimo". Ahora bien, debido a la imposibilidad de cuantificar sobre clases en general, hemos de modificar la definición a la hora de plasmar dicha idea intuitiva, cuantificando sobre conjuntos y añadiendo la condición de que todos los intervalos ilimitados a la izquierda y abierto a la derecha de extremo $x \in A$ (que denominaremos segmentos iniciales de extremo x) sean conjuntos.

Definición: Diremos que una clase parcialmente ordenada $(A,\leq)$ es bien ordenada sí y sólo sí verifica las condiciones

i) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow]\leftarrow,x[\in U)$.

ii) Todo subconjunto no vacío de A posee elemento mínimo.

En tal situación, diremos que $\leq$ es una buena ordenación de la clase A. De la definición anterior resulta que si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada y B es una subclase no vacía de A entonces $(\exists a)(a \in B)$ luego puede ocurrir que $B \cap]\leftarrow,a[= \emptyset$, en cuyo caso $a = \text{mín } B$; o bien que $B \cap]\leftarrow,a[\neq \emptyset$, en cuyo caso $B \cap]\leftarrow,a[$ es un subconjunto no vacío de A luego $(\exists b)(b = \text{mín } B \cap]\leftarrow,a[)$: obviamente $b = \text{mín } B$.

Conclusión: En una clase bien ordenada $(A,\leq)$ toda subclase no vacía de A posee elemento mínimo.

Proposición 1

Si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada entonces $(A,\leq)$ es una clase totalmente ordenada y, además, verifica la propiedad del supremo (es decir, si B es una subclase no vacía de A y acotada superiormente en $(A,\leq)$, entonces B posee supremo en $(A,\leq)$).

Demostración:

Sean $x \in A$ e $y \in A$. Puesto que $\{x,y\}$ es un subconjunto no vacío de A poseerá elemento mínimo, en consecuencia x e y son comparables.

Por otra parte, si B es una subclase no vacía de A acotada superiormente en $(A,\leq)$ entonces $C = \{x: x \text{ es cota superior de } B \text{ en } (A,\leq)\}$ es una subclase no vacía de A y, por tanto, poseerá elemento mínimo en $(A,\leq)$. Trivialmente, el mínimo de C es el supremo de B.

□

Obsérvese que si (A,R) es una clase bien ordenada y B es una subclase de A entonces $(B,R^*_{\restriction B})$ es una clase bien ordenada, ya que si C es una subclase no vacía de B también lo será de A, luego existirá el elemento mínimo de C en (A,R) que, triviamente, lo será asímismo en $(B,R^*_{\restriction B})$.

Proposición 2

Si las clases parcialmente ordenadas $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son orden isomorfas y, además, $(A,\leq)$ es bien ordenada entonces $(B,\leq)$ es bien ordenada.

Demostración:

Sea G un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ y sea C una subclase no vacía de B. Entonces $D = \{x: G(x) \in C\}$ es una subclase no vacía de A. Notemos $a = \text{mín } D$ y veamos que $G(a) = \text{mín } C$; en efecto, si $x \in C$ entonces existe $y \in D$ tal que $x = G(y)$, por tanto $a \leq y$, de donde resulta $G(a) \leq G(y) = x$. En consecuencia $G(a) = \text{mín } C$.
Además, $]\leftarrow, z[$ $(z \in B)$ es un conjunto por serlo $]\leftarrow, x[$, siendo $G(x) = z$.

□

Proposición 3

Si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada entonces para cada elemento x de A, distinto del elemento máximo de $(A,\leq)$, si lo hubiere, existe un único elemento $x^+ \in A$ tal que verifica las condiciones:

a) $x < x^+$

b) $(\forall y)(y \in A \wedge x < y \leq x^+ \Rightarrow y = x^+)$

Demostración:

Si $x \in A$ $(x \neq \text{máx } A)$ entonces el intervalo $]x,\rightarrow[$ es una subclase no vacía de A (ya que de lo contrario, el elemento x sería el máximo de $(A,\leq)$).

Sea $x^+ = \text{mín}\ ]x,\to[$; puesto que $x^+ \in\ ]x,\to[$ resulta $x < x^+$, por otra parte si $y \in A$ verifica $x < y \leq x^+$ entonces $y \in\ ]x,\to[$, pero como $x^+ = \text{mín}\ ]x,\to[$ resultará $x^+ \leq y$ y, por tanto, $y = x^+$.

La unicidad de x^+ se deduce de la unicidad del elemento siguiente en una clase totalmente ordenada. □

De la proposición anterior resulta, pues, que en toda clase bien ordenada cada elemento distinto del máximo, si lo hubiera, posee siguiente; ahora bien, el recíproco es falso, en general, es decir en una clase parcialmente ordenada puede verificarse que cada elemento distinto del máximo de $(A,\leq)$, si lo hubiere, posea un único elemento siguiente y, en cambio, la clase no ser bien ordenada. En efecto: sean a,b,c conjuntos distintos y consideremos en el conjunto $A = \{a,b\} \cup \{c\}$ la relación $R = \{(a,a)(b,b)(c,c)(a,c)(b,c)\}$; trivialmente, (A,R) es un conjunto parcialmente (no totalmente) ordenado tal que $c = \text{máx}\ A$, el siguiente de a es c y el siguiente de b es c; en cambio, (A,R) no es bien ordenado.

A continuación, pretendemos caracterizar los segmentos de una clase bien ordenada, para lo cual demostraremos que, salvo la propia clase, dichos segmentos son intervalos abierto a la derecha e ilimitado a la izquierda.

Proposición 4

Si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada y B es un segmento de $(A,\leq)$ $(B \neq A)$, entonces existe un único elemento $x \in A$ tal que $B = \ ]\leftarrow,x[$.

Demostración:

Consideremos la clase $C = A-B$. Puesto que $B \neq A$ resulta que C es una subclase no vacía de A; sea entonces $x = \text{mín } C$ y veamos que $B =]\leftarrow,x[$. En efecto: si $y \in]\leftarrow,x[$ entonces $(y \in A) \wedge (y < x)$ lo que implica $y \notin C$ (ya que $x = \text{mín } C$), luego $y \in B$.

Recíprocamente, si $y \in B$ entonces $y \notin C$ y, por tanto, $y < x$ (ya que, de lo contrario, al ser $(A,\leq)$ totalmente ordenada deduciríamos $x \leq y$ y puesto que B es un segmento de $(A,\leq)$ resultaría $x \in B$, lo que contradice que x pertenezca a la clase C). La unicidad del tal x sigue, inmediatamente, de que $(A,\leq)$ es totalmente ordenada, ya que si $x \in A$ e $y \in A$ son elementos distintos entonces $]\leftarrow,x[\neq]\leftarrow,y[$.

□

Definición: Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada y $x \in A$ entonces denominaremos segmento de extremo x, que notaremos $S(x)$, al intervalo $]\leftarrow,x[$.

Teorema de inducción transfinita

Si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada y B es una subclase de A tal que

$$(\forall x)(x \in A \wedge S(x) \subset B) \Rightarrow (x \in B)$$

entonces $B = A$.

Demostración:

Si se verificara $A \neq B$ entonces $C = A-B$ sería una subclase no vacía de A; sea $x = \text{mín } C$. En tal situación $S(x) \subset B$, ya que si $y \in A$ es un elemento tal que $y < x$ resultaría que $y \notin C$ y, por tan-

to, $y \in B$. Ahora bien, si $S(x) \subset B$ concluimos $x \in B$, lo que contradice que $x = \text{mín } C \in C$.

□

Proposición 5

Sean $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ clases bien ordenadas. Sea F un morfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ tal que rec F es un segmento de $(B,\leq)$ y G un morfismo de orden inyectivo de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$. En tal situación se verifica

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow F(x) \leq G(x))$$

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir que exista un elemento $x \in A$ tal que $F(x) > G(x)$, y consideremos la clase $C = \{x: x \in A \wedge F(x) > G(x)\}$ que, por tanto, será una subclase no vacía de A. Sea $a = \text{mín } C$; puesto que $a \in C$ se verificará $F(a) > G(a)$ y teniendo presente que $F(a) \in \text{rec } F$ y que rec F es un segmento de $(B,\leq)$ deducimos $G(a) \in \text{rec } F$, es decir, existirá un elemento $b \in A$ tal que $G(a) = F(b) < F(a)$. Ahora bien, puesto que F es un morfismo de orden, de la relación $F(b) < F(a)$ deducimos $b < a$ y, por tanto, $b \notin C$. Conclusión: $F(b) \leq G(b)$.

Por otra parte, al ser $b < a$ y G un morfismo de orden inyectivo resultará $G(b) < G(a) = F(b)$ con lo cual llegaríamos a la relación

$$F(b) \leq G(b) < G(a) = F(b)$$

que, obviamente, es una contradicción.

Corolario 1

Si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada y G es un morfismo de or

den inyectivo de $(A,\leq)$ en $(A,\leq)$, entonces se verifica

$$(\forall x)(x\in A \Rightarrow x \leq G(x))$$

En efecto: Basta aplicar la proposición anterior considerando $F = \Delta_A$ y observando que $\operatorname{rec} F = \operatorname{rec} \Delta_A = A$ es un segmento de $(A,\leq)$. □

Corolario 2

Si las clases bien ordenadas $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son orden isomorfas, entonces existe un único isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$.

En efecto: supongamos que F y G son isomorfismos de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$. En tal situación $G^{-1}\circ F$ es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(A,\leq)$, luego por el corolario anterior se verificará $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x \leq (G^{-1}\circ F)(x))$, es decir $(\forall x)(x\in A \Rightarrow G(x) \leq F(x))$. Análogamente, $F^{-1}\circ G$ es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(A,\leq)$ y, por tanto, del corolario 1 resultará $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x \leq (F^{-1}\circ G)(x))$, es decir, $(\forall x)(x\in A \Rightarrow F(x) \leq G(x))$.

Conclusión: $(\forall x)(x\in A \Rightarrow F(x) = G(x))$. Teniendo presente que $\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} G = A$ deducimos finalmente $F = G$. □

Corolario 3

Si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada, x un elemento de A y B una subclase de $S(x)$, entonces $(A,\leq)$ no es orden isomorfa a $(B,\leq)$.

En efecto: si $(A,\leq)$ fuese orden isomorfa a $(B,\leq)$ y G un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$, entonces la gráfica G puede considerarse como un morfismo de orden inyectivo de $(A,\leq)$ en $(A,\leq)$, ya que $G\subset A\times B\subset A\times A$. Luego, del corolario 1 deduciremos que $x \leq G(x)$ y, por tanto, $G(x)\notin B$ lo que contradice que $\operatorname{rec} G = B$. □

Corolario 4

Si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada, x e y dos elementos distintos de la clase A, entonces $S(x)$ y $S(y)$, con las respectivas ordenaciones inducidas, no son orden isomorfos.

En efecto: si $x \neq y$, al ser los elementos comparables, se verificará $(x < y) \vee (y < x)$. Para fijar ideas supongamos $x < y$. En tal situación $S(x) \subset S(y)$; ahora bien, como $S(x)$ es un segmento de $(A,\leq)$, $S(x) \subset S(y)$ y $S(y) \subset A$ resulta que $S(x)$ es un segmento inicial de $(S(y),\leq)$, luego del corolario 3 concluimos que $(S(x),\leq)$ no es orden isomorfo a $(S(y),\leq)$.

□

Proposición 6

Sean $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ clases bien ordenadas. Sean G y G' morfismos de orden epiyectivos de segmentos de $(A,\leq)$ en segmentos de $(B,\leq)$. En tal situación se verifica:

$$G\Big|_{\text{dom } G \cap \text{dom } G'} = G'\Big|_{\text{dom } G \cap \text{dom } G'}$$

Demostración:

En primer lugar observemos que $\text{dom } G \cap \text{dom } G'$ es un segmento de $(A,\leq)$ por serlo dom G y dom G'.

Consideremos la clase $C = \{x: x \in \text{dom } G \cap \text{dom } G' \wedge G(x) \neq G'(x)\} \subset A$. Si C fuese una clase no vacía entonces existirá $a = \text{mín } C$, luego $G(a) \neq G'(a)$ y, por tanto, $[G(a) < G'(a)] \vee [G'(a) < G(a)]$. Para fijar ideas supongamos que $G(a) < G'(a)$. Puesto que rec G' es un segmento de $(B,\leq)$ obtenemos $G(a) \in \text{rec } G'$, es decir, existirá un elemento $b \in \text{dom } G'$ tal que $G(a) = G'(b) < G'(a)$, luego $b \leq a$ ya que G' es un morfismo de orden. Finalmente, teniendo presente que $a \in \text{dom } G$ y dom G es un segmento de $(A,\leq)$ concluimos que $b \in \text{dom } G$, luego $b=a$ ya que $b \leq a$ y $a = \text{mín } C$. Pero si $b = a$ resulta $G(a) = G'(a) < G'(a)$, lo que es una contradicción.

Conclusión: $C = \emptyset$, lo que demuestra la proposición. □

Proposición 7

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son clases bien ordenadas, entonces, existe una gráfica G de A en B que es un morfismo de orden de $(\text{dom } G, \leq)$ en $(\text{rec } G, \leq)$, de tal manera que dom G es un segmento de $(A,\leq)$, rec G es un segmento de $(B,\leq)$ y, además, $(\text{dom } G = A \vee \text{rec } G = B)$.

Demostración:

Consideremos la gráfica G definida así:

$G = \{(x,y): (x \in A) \wedge$ (existe una gráfica $F \subset A \times B$, que es un morfismo de orden de $(\text{dom } F, \leq)$ en $(\text{rec } F, \leq)$ y tal que a) $x \in \text{dom } F$; b) $(x,y) \in F$; c) dom F es un segmento de $(A,\leq)$; d) rec F es un segmento de $(B,\leq)$)$\}$

De la proposición anterior resulta inmediatamente que G es funcional.

Veamos que dom G es un segmento de $(A,\leq)$. En efecto: si $x \in \text{dom } G \wedge x' \in A \wedge x' \leq x$ y notamos por F la gráfica asociada a x cuya existencia garantiza la definición de G, resulta que $x' \in \text{dom } F$, ya que dom F es un segmento de $(A,\leq)$ y, por tanto $x' \in \text{dom } G$.

Análogamente se demuestra que rec G es un segmento de $(B,\leq)$.

Finalmente, vamos a demostrar que $(\text{dom } G = A) \vee (\text{rec } G = B)$. Supongamos lo contrario, es decir que $\text{dom } G \neq A$ y $\text{rec } G \neq B$. En tal situación, $A - \text{dom } G$ es una subclase no vacía de A; sea $a = \text{mín } (A - \text{dom } G)$. Análogamente existirá $b = \text{mín } (B - \text{rec } G)$.

La gráfica $G' = G \cup \{(a,b)\}$ es un morfismo de orden de $(\text{dom } G', \leq)$ en $(\text{rec } G', \leq)$ y, trivialmente, dom G' es un segmento de $(A, \leq)$ y rec G' es un segmento de $(B, \leq)$. Conclusión: $a \in \text{dom } G$, lo cual contradice que a sea el elemento mínimo de la clase $A - \text{dom } G$.

□

Corolario

Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y $(B, \leq)$ es una clase bien ordenada tal que $B \notin U$, entonces existe una única gráfica G de A en B que es un morfismo de orden de $(\text{dom } G, \leq)$ en $(\text{rec } G, \leq)$, verificando que $\text{dom } G = A$ y rec G es un segmento de $(B, \leq)$.

En efecto: la existencia de dicha gráfica se obtiene aplicando la proposición anterior, observando que si A es un conjunto entonces también lo será dom G y puesto que G es funcional deducimos del axioma de sustitución que rec G es un conjunto, luego $\text{rec } G \neq B$, es decir, $\text{dom } G = A$.

Si G' fuese otra gráfica de A en B verificando las condiciones del enunciado, entonces de la proposición 6 deducimos que $G'|_A = G|_A$ y, por tanto, $G = G'$; de donde sigue la unicidad.

□ □

§5. CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

Adentrándonos ahora en el estudio específico de los conjuntos bien ordenados para los que, obviamente, serán válidas todas las proposiciones enunciadas para clases bien ordenadas, observemos en primer lugar, que también las buenas ordenaciones en conjuntos, y a semejanza de las ordenaciones parciales y totales, pueden ser "transportadas" por apli-

caciones biyectivas. En efecto, si $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado y f es una aplicación biyectiva de A en un conjunto B, entonces la ordenación transportada a B por f dota a B de estructura de conjunto totalmente ordenado, orden isomorfo a $(A,\leq)$, luego de la proposición 2 (cap. II; §4; pág. 133) deducimos que B es bien ordenado por la ordenación transportada.

A continuación, vamos a demostrar cómo los conjuntos totalmente ordenados pueden ser descritos por sus segmentos, lo que nos permitirá profundizar en el estudio de la estructura del conjunto de segmentos de un conjunto bien ordenado.

Proposición 1

Sea $(A,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado no vacío. En tal situación se verifica:

a) Si existe $a = \text{máx } A$ entonces $A - \{a\} = \bigcup_{x\in A} S(x)$.

b) Si $(A,\leq)$ carece de elemento máximo entonces $A = \bigcup_{x\in A} S(x)$.

Demostración:

a) Si $y \in \bigcup_{x\in A} S(x)$ entonces existe $x \in A$ tal que $y \in S(x)$, luego $(y \in A) \wedge (y < x \leq a)$. Es decir, $y \in A - \{a\}$.
Recíprocamente, si $y \in A - \{a\}$ entonces $(y \in A) \wedge (y < a)$ luego $y \in S(a) \subset \bigcup_{x\in A} S(x)$.

b) Puesto que, para cada $x \in A$ se verifica $S(x) \subset A$, resultará $\bigcup_{x\in A} S(x) \subset A$.
Recíprocamente, si $y \in A$, puesto que $(A,\leq)$ carece de elemento máximo, existirá $x \in A$ tal que $y < x$, luego $y \in S(x) \subset \bigcup_{x\in A} S(x)$.

□

Si $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado, notaremos por A^* a la clase cuyos elementos son los segmentos de $(A,\leq)$. Puesto que A^* es una subclase de $P(A)$ resultará que A^* es un conjunto.

Proposición 2

Si $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces el conjunto A^* de segmentos de $(A,\leq)$ es bien ordenado por la relación de inclusión y, además, la gráfica $G = \{(x,y): x\in A \wedge y = S(x)\}$ es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(A^* - \{A\}, \subset)$.

Demostración:

Trivialmente, $(A^*,\subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado y G es una gráfica funcional de A en $A^* - \{A\}$. Además si $x\in A \wedge y\in A \wedge \wedge x < y$ entonces $S(x) \subsetneq S(y)$, de donde sigue que G es un morfismo de orden inyectivo de $(A,\leq)$ en $(A^* - \{A\}, \subset)$. Puesto que de la proposición 4 (§4) p. 134 resulta inmediatamente la epiyectividad de G y $(A,\leq)$ es totalmente ordenado, deducimos que G es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(A^* - \{A\}, \subset)$ y, por tanto, $(A^* - \{A\},\subset)$ es un conjunto bien ordenado. Veamos que el conjunto $(A^*,\subset)$ es, tam- - bién, bien ordenado. En efecto, sea $\mathcal{B}$ un subconjunto no vacío de A^*. Entonces, pueden darse estos tres casos:

a) $\mathcal{B} = \{A\}$

En este caso, trivialmente, A es el elemento mínimo de $\mathcal{B}$ en $(A^*,\subset)$

b) $A\in\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \neq \{A\}$

En este caso, se verificará $\emptyset \neq \mathcal{B} - \{A\} \subset A^* - \{A\}$ y, por tanto, existirá un elemento $B\in\mathcal{B} - \{A\}$ tal que para cada $C\in\mathcal{B} - \{A\}$ se verifique $B\subset C$. Ahora bien, puesto que $B\subset A$ concluimos que B es el elemento mínimo de $\mathcal{B}$ en $(A^*,\subset)$.

c) $A \notin \mathcal{B}$

En este caso $\mathcal{B} \subset A^* - \{A\}$ y el razonamiento concluye como en el apartado b), considerando $\mathcal{B}$ en lugar de $\mathcal{B} - \{A\}$.

□

Proposición 3

Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y S es un subconjunto de A^* verificando

a) $(\forall \mathcal{B})(\mathcal{B} \subset S \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in S) \wedge (\emptyset \in S)$

b) $(\forall x)(x \in A \wedge S(x) \in S \Rightarrow S(x) \cup \{x\} \in S)$

entonces $S = A^*$.

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir que $S \neq A^*$. $C = A^* - S$ es un subconjunto no vacío de A^*, sea $C = \text{mín } C$. Pueden darse estos dos casos:

a) que C posea elemento máximo, notémosle a. En tal caso $C = S(a) \cup \{a\}$; ahora bien, puesto que $S(a) \subsetneq C$ resulta $S(a) \notin C$, luego $S(a) \in S$ y, por tanto, $C = S(a) \cup \{a\} \in S$ lo que es una contradicción.

b) que C carezca de elemento máximo. En este caso $C = \bigcup_{x \in C} S(x)$; ahora bien

$(\forall x)(x \in C \Rightarrow S(x) \subsetneq C \Rightarrow S(x) \notin C \Rightarrow S(x) \in S)$.

Entonces si notamos $\mathcal{B} = \{S(x) : x \in C\} \subset S$ resulta que $C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in S$, lo que es una contradicción.

Conclusión: $S = A^*$.

□

Procesos recurrentes

Con relativa frecuencia suelen presentarse en distintos campos de la Matemática procesos del siguiente tipo: se "construyen aplicaciones" de un conjunto bien ordenado no vacío $(A,\leq)$ en un conjunto B mediante el siguiente esquema (que suele denominarse intuitivamente "proceso recurrente"):

1°.- Se define la imagen α del primer elemento a de $(A,\leq)$.

2°.- Si $x \in A - \{a\}$ entonces, supuestas conocidas las imágenes de los elementos estrictamente menores que x, se define ("mediante una ley recurrente") la imagen α_x de x, a partir de éstas.

Generalmente, tal proceso concluye con un "... y así sucesivamente" de contenido tan intuitivo como, a la vez, vago e impreciso ya que, salvo en el caso elemental en que A sea un conjunto finito (concepto que se introducirá posteriormente), los pasos 1° y 2° del proceso no establecen de manera directa la existencia de una aplicación del conjunto A en el conjunto B.

Surgen de inmediato varias preguntas: ¿existirá realmente una aplicación de A en B que satisfaga precisamente las condiciones expresadas intuitivamente en los pasos 1° y 2° del esquema?. En caso afirmativo ¿será única tal aplicación?. En tal situación, si el "proceso recurrente" no define directamente una aplicación de A en B ¿qué es lo que proporciona realmente? ¿en qué términos es expresable de forma más rigurosa dicho proceso?

Funciones de recurrencia

Vayamos por parte: ¿qué significa realmente dar un proceso recurrente?. Comencemos por el segundo paso. Si $x \in A - \{a\}$ entonces conocer las imágenes de los elementos estrictamente menores que x equiva

le a conocer una cierta aplicación g_x de $S(x)$ en B. Por tanto, el término "supuestas conocidas las imágenes de los elementos estrictamente menores que x, se define la imagen α_x de x a partir de éstas" equivale a "asociar a la aplicación $g_x \in F(S(x);B)$ un único elemento α_x de B" (lo que puedo identificar a asociar el elemento α_x de B a cada aplicación $h \in F(S(x);B)$.

Resulta entonces que el primer paso puede considerarse de forma similar al segundo, observando que al ser $S(a) = \emptyset$ existirá una única aplicación $\emptyset_B$ de $S(a)$ en B y, en consecuencia, "definir la imagen α del primer elemento a" equivale a "asociar a la aplicación $\emptyset_B \in F(S(a);B)$ un único elemento α de B".

Resumiendo: ¿qué significa dar un proceso recurrente?. Pues, simplemente, dar una cierta aplicación del conjunto $\bigcup_{x \in A} F(S(x);B)$ en el conjunto B: lo cual vamos a denominar una función de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en B.

Definición: Si $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado no vacío y B es un conjunto, entonces una función de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en B es una aplicación del conjunto $\bigcup_{x \in A} F(S(x);B)$ en el conjunto B.

Esta definición es generalizable al caso $A = \emptyset$ considerando entonces $\emptyset_B$ como única función de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en B.

Todo "proceso recurrente" tiene pues, implícito una función de recurrencia. Desde el punto de vista práctico el problema fundamental que aparece es el de explicitar las funciones de recurrencia inherentes a los procesos recurrentes.

La siguiente cuestión que abordamos es: si un proceso recurrente lo que realmente define es una función de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en B ¿existirá asociada a dicha función de recurrencia una única

aplicación de A en B verificando las condiciones expresadas intuitivamente en los pasos 1° y 2° del esquema?

El teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (o más brevemente, el teorema de recurrencia transfinita) responde afirmativamente a dicha cuestión.

Teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita

Sea $(A,\leq)$ un conjunto bien ordenado no vacío. Sea B un conjunto y H una función de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en B. En tal situación, existe una única aplicación f de A en B verificando:

$$(\forall x)(x\in A \Rightarrow f(x) = H(f_{|S(x)})).$$

Demostración:

Unicidad de la tal aplicación f

Supongamos que f y g fuesen aplicaciones de A en B verificando

$$(\forall x)(x\in A \Rightarrow f(x) = H(f_{|S(x)}) \wedge g(x) = H(g_{|S(x)}))$$

Consideremos entonces el conjunto

$$C = \{x\in A:\ f(x) = g(x)\}.$$

Demostrar que $f=g$ se reduce a probar que $C=A$, para lo cual es suficiente establecer que C verifica las hipótesis del teorema de inducción transfinita. Veámoslo.

Si $x\in A$ es tal que $S(x)\subset C$ entonces $(\forall y)(y\in S(x)\Rightarrow f(y)=g(y))$, luego $f_{|S(x)} = g_{|S(x)}$ y, en consecuencia, $f(x) = H(f_{|S(x)}) = H(g_{|S(x)}) = g(x)$.

Por tanto $x \in C$. Conclusión: $C = A$. Es decir, $f = g$.

Existencia de la tal aplicación f

Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in A: (\exists g_x)(g_x \in F(S^*(x);B) \wedge (\forall y)(y \in S^*(x) \Rightarrow g_x(y) = H(g_{x|S(y)}))\}$$

en donde notamos $S^*(x) = S(x) \cup \{x\} = \{z \in A: z \leq x\}$.

Obsérvese que si $x \in A$ entonces la aplicación $g_x \in F(S^*(x);B)$ verificando $(\forall y)(y \in S^*(x) \Rightarrow g_x(y) = H(g_{x|S(y)}))$ es única (en efecto, si h_x fuese otra tal aplicación se consideraría el conjunto $C_x = \{y \in S^*(x): g_x(y) = h_x(y)\}$ y se probaría como antes que

$$(\forall z)(z \in S^*(x) \wedge S(z) \subset C_x \Rightarrow z \in C_x)).$$

Lema 1: Si $\gamma \in A \wedge \beta \in A \wedge \gamma < \beta$ entonces $g_{\beta|S^*(\gamma)} = g_\gamma$

En efecto: $k = g_{\beta|S^*(\gamma)}$ es una aplicación de $S^*(\gamma)$ en B verificando

$$(\forall y)(y \in S^*(\gamma) \Rightarrow k(y) = g_\beta(y) = H(g_{\beta|S(y)}) = H(k_{|S(y)}))$$

Luego de la unicidad de g_γ concluimos $k = g_\gamma$, lo que prueba el lema 1.

Lema 2: $(\forall \gamma)(\gamma \in A \wedge S(\gamma) \subset A \Rightarrow \gamma \in A)$

En efecto: sea $\gamma \in A$ tal que $S(\gamma) \subset A$ y definamos

$\bar{g}_\gamma \in F(S(\gamma);B)$ así: $\bar{g}_\gamma(x) = g_x(x) \quad (\forall x \in S(\gamma))$

$g_\gamma \in F(S^*(\gamma);B)$ así: $g_{\gamma|S(\gamma)} = \bar{g}_\gamma \wedge g_\gamma(\gamma) = H(\bar{g}_\gamma)$

La aplicación g_γ de $S^*(\gamma)$ en B verifica:

$$x \in S^*(\gamma) \Rightarrow \begin{cases} x \in S(\gamma) \Rightarrow g_\gamma(x) = \bar{g}_\gamma(x) = g_x(x) = H(g_{x|S(x)}) = H(g_{\gamma|S(x)}) \\ \text{ó} \\ x = \gamma \Rightarrow g_\gamma(x) = g_\gamma(\gamma) = H(\bar{g}_\gamma) = H(g_{\gamma|S(\gamma)}) \end{cases}$$

En consecuencia $\gamma \in \acute{A}$, lo que prueba el lema 2.

Del lema 2 y del teorema de inducción transfinita concluimos $\acute{A}=A$. En tal situación, definimos una aplicación f de A en B así:

"Para cada $x \in A$, por definición: $f(x) = g_x(x)$"

Obsérvese que de esta definición resulta inmediatamente que si $x \in A$ entonces $f_{|S(x)} = g_{x|S(x)}$ (en efecto: si $y \in S(x)$ entonces por una parte $f(y) = g_y(y)$. Por otra parte $y \in S(x) \Rightarrow y < x \Rightarrow g_{x|S^*(y)} = g_y \Rightarrow g_y(y) = g_x(y)$). En consecuencia, la tal aplicación f de A en B verifica

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow f(x) = g_x(x) = H(g_{x|S(x)}) = H(f_{|S(x)})),$$

con lo cual queda establecida la existencia de una tal aplicación f, y completada la demostración del teorema.

□

"Interpretación" del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita.

Veamos a continuación que la única aplicación f de A en B asociada a la función de recurrencia H determinada por un "proceso recurrente", satisface las condiciones expresadas intuitivamente en los pasos 1° y 2° del correspondiente esquema.

En efecto:

1er paso: Si $a = \min A$ entonces $S(a) = \emptyset$ luego

$$f(a) = H(f_{|S(a)}) = H(f_{|\emptyset}) = H(\emptyset_B) = \alpha \in B$$

Por tanto, la aplicación f "define la imagen de a", y que es precisamente el elemento f(a) de B asociado a la aplicación $\emptyset_B$ por la función de recurrencia H.

2° paso: Si $x \in A - \{a\}$ entonces $f(x) = H(f_{|S(x)}) = \alpha_x \in B$; luego efectivamente "supuestas conocidas las imágenes de los elementos estrictamente menores que x" (dicho don otras palabras "supuesta conocida la aplicación $f_{|S(x)}$ de S(x) en B") entonces queda definida por f la imagen $\alpha_x = f(x)$ de x, a partir de éstas. Es decir, α_x es deducida de la aplicación $f_{|S(x)}$ a través de la función de recurrencia H (o sea mediante lo que intuitivamente se denominaba "una ley de recurrencia").

Corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita.

Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado que posee más de un elemento y $a = \min A$. Sea B un conjunto no vacío y $\alpha \in B$. En tal situación, si H es una función de recurrencia del tipo $(A - \{a\}, \leq)$ en B entonces existe una única aplicación f de A en B verificando:

i) $f(a) = \alpha$

ii) $(\forall x)(x \in A - \{a\} \Rightarrow f(x) = H(f_{|S(x)}))$

Demostración

Consideremos la función de recurrencia G del tipo $(A, \leq)$ en B definida como sigue:

$$G\Big|_{\bigcup_{x\in A-\{a\}} F(S(x);B)} = H \quad \text{y} \quad G(\emptyset_B) = \alpha.$$

En tal situación, aplicando el teorema de recurrencia transfinita a la función de recurrencia G deducimos la existencia de una única aplicación f de A en B verificando

$$(\forall x)(x\in A \Rightarrow f(x) = G(f_{|S(x)})).$$

De donde resulta:

i) Si $x = a$ entonces $f(a) = G(f_{|S(a)}) = G(\emptyset_B) = \alpha$.

ii) Si $x\in A - \{a\}$ entonces $f(x) = G(f_{|S(x)}) = H(f_{|S(x)})$.

Y, por tanto, el corolario queda demostrado.

□

Uno de los teoremas fundamentales relativo a conjuntos bien ordenados es el teorema de isomorfismo entre dichos conjuntos, que estableceremos en el próximo capítulo como aplicación del lema de Zorn, que es una de las proposiciones equivalentes al axioma de la elección.

□ □

PROBLEMAS

1.- Encontrar el error en el siguiente razonamiento: "Sea A una clase y R una relación simétrica y transitiva en A. Si x e y son elementos de A tales que $(x,y) \in R$ entonces de la simetría de R deducimos $(y,x) \in R$; finalmente, de $(x,y) \in R$, $(y,x) \in R$ y de la transitividad de R concluimos $(x,x) \in R$; por tanto, R es reflexiva en A. Conclusión: toda relación simétrica y transitiva en una clase A es de equivalencia".

2.- Si R_1 y R_2 son relaciones en una clase A demostrar que

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1} \quad \text{y} \quad (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$$

Si $\{R_i\}_{i\in I}$ es una familia de relaciones en un conjunto A demostrar que

$$\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i^{-1} \quad \text{y} \quad \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right)^{-1} = \bigcup_{i\in I} R_i^{-1}.$$

3.- Sea R una relación en una clase A, demostrar:

a) R es reflexiva en A sí y sólo sí $\Delta_A \subset R$
b) R es simétrica en A sí y sólo sí $R = R^{-1}$
c) R es transitiva en A sí y sólo sí $R \circ R \subset R$
d) R es antisimétrica en A sí y sólo sí $R \cap R^{-1} \subset \Delta_A$
e) R es conexa en A sí y sólo sí $R \cup R^{-1} = A \times A$
f) Si R es reflexiva y transitiva, entonces $R \circ R = R$. ¿Es cierto el recíproco?.
g) R es de equivalencia en A sí y sólo sí $R \circ R^{-1} = R \wedge \text{dom } R = A$

4.- Si $\{R_i\}_{i\in I}$ es una familia de relaciones de equivalencia (respectivamente, de orden parcial) en un conjunto A, demostrar que

$$\bigcap_{i\in I} R_i$$

es una relación de equivalencia (respectivamente, de orden parcial) en A ¿qué puede asegurarse acerca de la relación $\bigcup_{i\in I} R_i$?.

5.- Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en una clase A. Demostrar que $R_1 \circ R_2$ es una relación de equivalencia en A sí y sólo si $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Indicación: Utilícese las caracterizaciones obtenidas en el problema 3.

6.- Si R es una relación de una clase A demostrar que $\cup\cup R \subset A$.
Indicación: Demuéstrese, previamente, que R es, asímismo, una relación en $\cup\cup R$.

7.- Sea A un conjunto y consideremos la clase $\mathcal{R}_s$ cuyos elementos son las relaciones simétricas en A; para cada relación R en A notemos:

$$A_R = \{T: T \in \mathcal{R}_s \wedge T \subset R\}$$
$$A_R^* = \{T: T \in \mathcal{R}_s \wedge R \subset T\}$$

a) Demostrar que $\cup A_R \in \mathcal{R}_s$ y $\cap A_R^* \in \mathcal{R}_s$.
b) Demostrar que A_R posee elemento máximo en $(P(A\times A), \subset)$ y A_R^* posee elemento mínimo en $(P(A\times A), \subset)$.
c) Demostrar que $\mathcal{R}_s$ es cofinal y coinicial en $(P(A\times A), \subset)$.

Indicación: Tened presente que para cada $R \in P(A\times A)$ se verifica $\cup A_R = R \cap R^{-1}$ y $\cap A_R^* = R \cup R^{-1}$.

8.- Sea $\pi(A)$ la clase cuyos elementos son las particiones del conjunto A; definimos en $\pi(A)$ la relación $\leq$ así: para cada $x \in \pi(A)$, $y \in \pi(A)$:

$$x \leq y \Leftrightarrow y \text{ es más fina que } x$$

Demostrar que $(\pi(A), \leq)$ es un conjunto reticulado superiormente.
Indicación: Téngase presente la proposición 13 del capítulo I, §5.

9.- Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y consideremos la clase

$$\mathcal{A} = \{B: [B \in P(A)] \wedge [(\forall x)(\forall y)(x \in B \wedge y \in B \wedge x \neq y \Rightarrow \neg(x \leq y \vee y \leq x))]\}$$

definimos en $\mathcal{A}$ la relación R así: para cada $B \in \mathcal{A} \wedge C \in \mathcal{A}$:

$$[(B,C) \in R] \Leftrightarrow [(\forall x)(x \in B \Rightarrow (\exists y)(y \in C \wedge x \leq y))]$$

a) Probar que (A,R) es un conjunto parcialmente ordenado.
b) Probar que (A,R) es un conjunto totalmente ordenado sí y sólo sí $(A,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.
c) Si definimos $f \in F(A;A)$ así $f(x) = \{x\}$ $(\forall x \in A)$ demostrar que f es un morfismo de orden inyectivo de $(A,\leq)$ en (A,R) y, en cambio, no es morfismo de orden de $(A,\leq)$ en (A,C).

10.- Sea f una aplicación de un conjunto A en sí mismo y consideremos

$$A = \{B: B \in P(A) - \{\emptyset\} \wedge f(B) \subset f^{-1}(B)\}$$

Demostrar:
a) Si $B \in A$ entonces $f(B) \in A$ y $f^{-1}(B) \in A$
b) Si B es un elemento minimal de (A,C) entonces $B \subset f(A)$.
c) Si (A,C) carece de elementos minimales, entonces para cada $x \in A$ se verifica $f(x) \neq x$.
Indicación: b) Si B es un elemento de A tal que $B - f(A) \neq \emptyset$ y $a \in B - f(A)$, demostrar que $B - \{a\} \in A$.
d) Si $x \in A$ verifica $f(x) = x$ demostrar que $\{x\}$ es un elemento minimal de (A,C).

11.- Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos parcialmente ordenados, diremos que el par ordenado (f,g) es una correspondencia de Galois relativa a $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$, sí y sólo sí

a) $f \in F(A;B)$ y $g \in F(B;A)$
b) f y g son aplicaciones decrecientes.
c) Para cada $x \in A$ se verifica $x \leq g[f(x)]$
d) Para cada $y \in B$ se verifica $y \leq f[g(y)]$

Diremos, asímismo, que un elemento $x \in A$ (respectivamente, $y \in B$) es cerrado por dicha correspondencia de Galois sí y sólo sí $x = g[f(x)]$ (respectivamente, $y = f[g(y)]$). En tal situación, se pide:
a) Demostrar que $f \circ g \circ f = f$ y $g \circ f \circ g = g$.
b) Demostrar que los elementos cerrados de A (respectivamente, B) por dicha correspondencia, son los elementos del conjunto $g(B)$ (respectivamente, $f(A)$).
c) Demostrar que $(g(B),\leq)$ es orden isomorfo a $(f(A),\geq)$.

12.- Sea f una aplicación del conjunto A en el conjunto B y consideremos

$$A = \{C: C \in P(A) \wedge f(C) = f(A)\}$$

demostrar la equivalencia de las proposiciones
a) C es un elemento minimal de $(A,\subset)$
b) $f_{|C}$ es una aplicación inyectiva.

13.- Sea f una aplicación del conjunto A en el conjunto B y consideremos

$$A = \{C: C \in P(A) \wedge f_{|C} \text{ es inyectiva}\}$$

demostrar que si f es epiyectiva entonces son equivalentes las proposiciones:
a) C es un elemento maximal de $(A,\subset)$.
b) $f_{|C}$ es una aplicación epiyectiva.

14.- Si designamos por A la clase cuyos elementos son las relaciones de orden parcial en el conjunto A (dicha clase es un conjunto ¿porqué?), demostrar la equivalencia de las proposiciones:
a) R es una relación de orden total en A.
b) R es un elemento maximal de $(A,\subset)$.
¿Existen elementos minimales en $(A,\subset)$?.

15.- Sea ξ la clase cuyos elementos son las relaciones de equivalencia en el conjunto A. Demostrar que $(\xi,\subset)$ es un conjunto reticulado.
Indicación: Obsérvese que para cada $R\in\xi$, $S \in \xi$ se verifica:

$\sup\{R,S\} = \cap\{T: T\in\xi \wedge R\subset T \wedge S\subset T\}$
$\inf\{R,S\} = R\cap S$.

16.- Sean A,B,C conjuntos no vacíos, sean $f\in F(A;B)$ y $g\in F(B;C)$. Demostrar la existencia de una aplicación $h\in F(B,A)$ tal que $f\circ h\circ f = f$.
Indicación: Utilícese el problema 20 del capítulo I, considerando la descomposición canónica de f.

17.- Sea A un conjunto y $f\in F(P(A);P(A))$ una aplicación creciente respecto de la relación de inclusión en P(A).
a) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de partes de A demostrar:

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) \supset \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

b) Si notamos

$$\mathcal{B} = \{B: B\in P(A) \wedge f(B)\subset B\}$$
$$C = \{C: C\in P(A) \wedge C\subset f(C)\}$$
$$D = \cap\mathcal{B} \quad \text{y} \quad E = \cup C$$

probar que $f(D) = D$; $f(E) = E$ y, además

$$(\forall G)(G\in P(A) \wedge f(G) = G \Rightarrow D\subset G\subset E)$$

18.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado tal que $A\neq\emptyset$. Demostrar que $(A,\leq)$ es bien ordenado sí y sólo sí se verifica:
a) $(A,\leq)$ es totalmente ordenado.
b) $(A,\leq)$ posee elemento mínimo.
c) $(\forall B)(B\subset A \wedge (\forall x)(x\in A \Rightarrow]\leftarrow,x[\subset B \Rightarrow x\in B))) \Rightarrow B = A)$
Indicación: Para demostrar que $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado, probar que si un subconjunto B de A carece de elemento mínimo entonces $B=\emptyset$, para ello aplíquese c) al conjunto A-B.

19.- Sea A un conjunto y consideremos la clase

$$\mathcal{A} = \{B: (\exists C)(C\in A \wedge B\subset C)\}$$

a) Demostrar que $\mathcal{A}$ es un conjunto.
b) Demostrar que un conjunto M es maximal de $(\mathcal{A},\subset)$ sí y sólo sí es maximal de $(A,\subset)$.
Indicación: a) Teniendo presente que $A\in\mathcal{U} \Rightarrow \cup A\in\mathcal{U}$ probar que $A\subset\mathcal{A}\subset P(\cup A)$.

20.- Si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, demostrar la equivalencia de las proposiciones:
a) Todo subconjunto no vacío de A acotado superiormente en $(A,\leq)$ posee supremo en $(A,\leq)$.
b) Todo subconjunto no vacío de A acotado inferiormente en $(A,\leq)$ posee ínfimo en $(A,\leq)$.

21.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\{A_i\}_{i\in I}$ una fami

lia de partes de A bien ordenadas por la ordenación inducida y tales que

$(\forall(i,j))((i,j)\in I\times I \Rightarrow A_i$ es segmento de $(A_j,\leq) \vee A_j$ es segmento de $(A_i,\leq))$

a) Demostrar que $(\bigcup_{i\in I} A_i,\leq)$ es un conjunto bien ordenado.

b) Demostrar que para cada $j\in I$ el conjunto A_j es un segmento de $(\bigcup_{i\in I} A_i,\leq)$.

22.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado y consideremos

$\mathcal{A} = \{B: (B\in P(A)-\{\emptyset,A\})\wedge(B$ segmento de $(A,\leq)) \wedge (B$ carece de máximo en $(A,\leq))\}$

a) Demostrar que para cada $B\in\mathcal{A}$, $C\in\mathcal{A}$ se verifica:

$$[B\subset C] \Leftrightarrow [(B=C) \vee (C-B\neq\emptyset)]$$

b) Demostrar que todo subconjunto no vacío de $\mathcal{A}$ acotado superiormente (respectivamente, inferiormente) posee supremo (respectivamente, ínfimo) en $(\mathcal{A},\subset)$.

c) Demostrar que si $B\in\mathcal{A}$ entonces B está acotado superiormente en $(A,\leq)$.

d) Si, además, el conjunto $(A,\leq)$ es denso, demostrar que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{x: (\exists y)(y\in A \wedge x =]\leftarrow,y[)$$

es denso en $(\mathcal{A},\subset)$.

23.- Sea A un conjunto no vacío y consideremos en $\mathcal{F}(A;A)$ la relación R definida así: para cada $f\in\mathcal{F}(A;A)$, $g\in\mathcal{F}(A;A)$

$$(f,g)\in R \Leftrightarrow f(A) = g(A)$$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia en $\mathcal{F}(A;A)$.

b) Demostrar la existencia de una aplicación biyectiva de $\mathcal{F}(A;A)/R$ en $P(A)-\{\emptyset\}$.

24.- Sea A un conjunto, B un subconjunto de A y consideremos en $P(A)$ las relaciones R_1 y R_2 definidas así: para cada $X\in P(A)$ $Y\in P(A)$:

$$(X,Y)\in R_1 \Leftrightarrow X\cap B = Y\cap B$$
$$(X,Y)\in R_2 \Leftrightarrow X\cup B = Y\cup B$$

a) Demostrar que R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia en $P(A)$.
b) Demostrar la existencia de una aplicación biyectiva de $P(A)/R_1$ en $P(B)$.
c) Demostrar la existencia de una aplicación biyectiva de $P(A)/R_2$ en la clase (que es un conjunto) cuyos elementos son los subconjuntos de A que contienen a B.

25.- Si F es una relación de equivalencia en la clase A y G es una relación de equivalencia en la clase B ¿puede afirmarse que $F \times G$ es una relación de equivalencia en la clase $A \times B$?.

26.- Demostrar que si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que $A \neq \emptyset$ entonces la clase $\dot{A} = \{(B,\leq): (B,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado orden-isomorfo a $(A,\leq)\}$ es propia.
Indicación: Téngase presente que la clase dom $\dot{A}$ es propia.

27.- ¿Puede afirmarse que una clase parcialmente ordenada posee una única parte cofinal sí y sólo sí posee una única parte coinicial?.

28.- Demostrar que un conjunto filtrante $(A,\leq)$ es totalmente ordenado sí y sólo sí todo subconjunto no vacío de A que posee exactamente tres elementos tiene un único elemento máximal y un único elemento minimal.

29.- Demostrar que una clase filtrante $(A,\leq)$ es bien ordenada sí y sólo si toda subclase no vacía de A posee elementos minimales.

30.- a) Si R es una relación sobre una clase A, demostrar la existencia de una única relación transitiva R^t sobre A verificando:
i) $R \subset R^t$
ii) Si S es una relación transitiva sobre A tal que $R \subset S$ entonces $R^t \subset S$.

b) Sea A una clase no vacía tal que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \subset A)$ y consideremos $R = \{(x,y) \in A \times A: x = y \vee x \in y\}$. Demostrar que (A, R^t) es una clase parcialmente ordenada que posee elemento mínimo.
Indicación: a) Si notamos $R_1 = R$, $R_2 = R \circ R$ y $R_{n+1} = R_n \circ R$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ entonces considérese

$$R^t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R_n .$$

b) Para una tal clase A prúebese que $\emptyset \in A$.

31.- Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado tal que

i) Existe $\alpha = \text{mín } A$.
ii) $(A, \leq)$ verifica la propiedad del supremo, es decir, todo subconjunto no vacío de A y acotado superiormente posee supremo.
iii) Para cada $x \in A$ existe $y \in A$ tal que $x < y \wedge]x,y[= \emptyset$.

Demostrar que $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.
Indicación: Si B es un subconjunto no vacío de A considérese $C = \{x \in A: (\forall y)(y \in B \Rightarrow x < y)\}$, y distíngase casos según C sea o no vacío.

32.- Si R es una relación de equivalencia sobre una clase A notaremos

$$A/R = \{x: (\exists y)(y \in A \quad x = \bar{y})\}$$

a) Demostrar que $A/A \times A = [A]$ (ver notación problema 34 cap. I).
b) Demostrar que $A/A \times A = \{A\} \Leftrightarrow A \in U$.
Indicación: Téngase presente el problema 34 del capítulo I.

33.- Sea A un conjunto no vacío. Si $B \in P(A)$ entonces definimos la relación R_B sobre A así: para cada $x \in A$ e $y \in A$

$$(x,y) \in R_B \Leftrightarrow x = y \vee \{x,y\} \subset B$$

i) Demostrar que para cada $B \in P(A)$ la relación R_B es de equivalencia sobre A y determinar el conjunto cociente A/R_B.

ii) Demostrar que $R_\emptyset = \Delta_A$; $R_A = A \times A$ y $(\forall x)(x \in A \Rightarrow R_{\{x\}} = \Delta_A)$.

iii) Si consideramos la aplicación f de $P(A)$ en $P(A \times A)$ definida por $f(B) = R_B$ $(\forall B \in P(A))$, demostrar que f es una aplicación creciente de $(P(A), \subset)$ en $(P(A \times A), \subset)$ no inyectiva y no epiyectiva.

34.- Sea $(A,\leq)$ una clase parcialmente ordenada. Demostrar la equivalencia de las proposiciones

i) Si B es una subclase no vacía de A entonces posee elementos minimales.

ii) Si B es una subclase de A tal que $(\forall x)(x\in A\wedge S(x)\subset B \Rightarrow x\in B)$ entonces $B=A$.

Indicación: ii)$\Rightarrow$ i). Si B fuese una subclase no vacía de A que carece de minimales, aplíquese ii) y conclúyase $A-B = A$.

35.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto bien ordenado no vacío. Sea B un conjunto y H una función de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en B. Consideremos el conjunto $\mathcal{S} = \{S:[S$ es un segmento de $(A,\leq)]\wedge[(\exists f_S)$ (f_S es una aplicación de S en B tal que $(\forall x)(x\in S \Rightarrow f_S(x)=H(f_{S|S(x)}))]\}$.

i) Demostrar que $(\forall\mathcal{B})(\mathcal{B}\subset\mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{S\in\mathcal{B}} S \in \mathcal{S})\wedge(\emptyset\in\mathcal{S})$.

ii) Demostrar que $(\forall x)(x\in A \wedge S(x)\in\mathcal{S} \Rightarrow S(x)\cup\{x\}\in\mathcal{S})$.

iii) Concluir la existencia de una aplicación f de A en B verificando $(\forall x)(x\in A \Rightarrow f(x) = H(f_{|S(x)}))$.

Indicación: i) Si $T = \bigcup_{S\in\mathcal{B}} S$ considérese $f_T\in F(T,B)$ definida así: $f_T(x) = f_S(x)$, siendo $S\in\mathcal{B}$ tal que $x\in S$. ii) Si $x_o\in A$ es tal que $S(x_o) = S\in\mathcal{S}$ y $C = S(x_o)\cup\{x_o\}$ considérese $f_C\in {}^{o}F(C;B)$ definida así: $f_C = f_S\wedge f_C(x_o) = H(f_S)$. iii) Aplíquese la proposición 3 pág.143).$|_S$

36.- (Teorema de recurrencia transfinita para clases bien ordenadas). Si A y B son clases notaremos por $G(A;B)$ la clase cuyos elementos son las gráficas funcionales de A en B en cuyo dominio es A. Si $(A,\leq)$ es una clase parcialmente ordenada no vacía tal que todos sus segmentos iniciales son conjuntos y B es una clase, entonces una gráfica de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en B es una gráfica funcional de $\bigcup_{x\in A} G(S(x);B)$ en B tal que su dominio es $\bigcup_{x\in A} G(S(x);B)$.

Demostrar que si $(A,\leq)$ es una clase bien ordenada no vacía y H es una gráfica de recurrencia del tipo $(A,\leq)$ en la clase B entonces existe una única gráfica funcional G de A en B tal que

i) dom G = A.

ii) $(\forall x)(x\in A \Rightarrow G(x) = H(G_{|S(x)}))$.

Indicación: Para probar la existencia de tal gráfica G aplíquese un procedimiento análogo al de la página 147, utilizando en lugar de aplicaciones las correspondientes gráficas funcionales que la determinan.

37.- Demostrar la existencia de una única gráfica funcional G de $\mathbb{N}$ en U verificando las condiciones: i) dom $G = \mathbb{N}$; ii) $G(0) = 0$; iii) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow G(n+1) = P(G(n)))$.
Demostrar, asímismo, que $\mathbb{N} \subsetneq \text{rec } G$ ¿Puede asegurarse que la clase $\cup \text{rec } G$ sea un conjunto?.
Indicación: Considérese la gráfica de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}, \leq)$ en U definida así: $H(\emptyset) = 0$ y si $x \in \mathbb{N}^* \wedge k \in G(S(x); U)$ entonces $H(k) = P(k(x))$. Asímismo, pruébese por inducción completa que $(\forall p)(p \in \mathbb{N} \Rightarrow G(p) \subset G(p+1))$.

(Ver notaciones y conceptos en Cap. 4).

38.- Sea (A,R) un conjunto parcialmente ordenado y consideremos

$$\mathcal{A} = \{B \in P(A) : R^*\big|_B \text{ es una buena ordenación en } B\}$$

Definimos en $\mathcal{A}$ la relación $\leq$ así: si $B \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{A}$ entonces

$$B \leq C \Leftrightarrow B \subset C \text{ y } B \text{ es un segmento de } C$$

Demostrar que $(\mathcal{A}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada cadena $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{A}, \leq)$ se verifica $\cup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$.
Indicación: Si B es un subconjunto no vacío de $\cup \mathcal{C}$ y $x \in B$ entonces existe $y \in \mathcal{C}$ tal que $x \in y \in \mathcal{C}$ luego $B \cap y \neq \emptyset$. Considérese $z = \min(B \cap y)$ y pruébese que $z = \min B$.

39.- Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, notaremos $\mathcal{C}(A, \leq)$ al conjunto cuyos elementos son las cadenas de $(A, \leq)$. Demostrar que si B es una cadena de $(\mathcal{C}(A, \leq), \subset)$ entonces $\cup B$ es una cadena de $(A, \leq)$.

40.- Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado tal que: i) Existe $\alpha = \min A$; ii) $(\forall x)(x \in A - \{\alpha\} \Rightarrow (\exists \bar{x})(\bar{x} \in A$ el siguiente de $\bar{x}$ es $x))$.

Demostrar que si B es un subconjunto de A tal que $\alpha \in B$ y $(\forall x)(x \in B \Rightarrow$ el siguiente de x pertenece a $B)$, entonces $B = A$.
Indicación: Pruébese que, en tal situación, B satisface las hipótesis del teorema de inducción transfinita.

41.- Si $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, demostrar la equivalencia de las proposiciones:

i) $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.
ii) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow S(x)$ es bien ordenado por la ordenación inducida).

42.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y notemos

$\acute{A} = \{B \subset A$: Para cada $x \in B \wedge y \in B \wedge x \neq y$ los elementos x e y no son comparables por $\leq\}$

Si $M \in \acute{A}$ demostrar la equivalencia de las proposiciones:

i) M es un elemento maximal de $(\acute{A},\subset)$.
ii) Cada elemento de A es comparable por $\leq$ con algún elemento de M.
Indicación: ii) $\Rightarrow$ i) Pruébese por la ley del contrarrecíproco.

43.- ¿Puede existir un conjunto A y una relación de equivalencia R en A tal que $P(A) = A/R$?
Indicación: Téngase presente que una clase de equivalencia nunca puede ser vacía.

44.- Si A es una clase propia tal que la relación R en A definida por $[x\,R\,y] \Leftrightarrow [x = y \vee x \in y]$ es de equivalencia, demostrar que la clase $B = \{z: (\exists t)(t \in A \wedge z = \bar{t})\}$ es propia.

Indicación: Purébese que $R = \Delta_A$.

3

EQUIVALENCIAS DEL AXIOMA DE LA ELECCIÓN: EL LEMA DE ZORN Y EL AXIOMA DE ZERMELO

INTRODUCCION

En 1914 Hausdorff dedujo el principio de maximalidad (todo conjunto preordenado posee, al menos, una cadena maximal por la relación de inclusión) a partir del teorema de la buena ordenación (en todo conjunto existe, al menos, una buena ordenación), también conocido como "axioma de Zermelo". En 1922 Kuratowski dedujo expresiones equivalentes del principio maximal (si A es un conjunto no vacío tal que toda cadena de (A,C) está acotada superiormente entonces (A,C) posee, al menos, un elemento maximal) y del principio minimal a partir del teorema de la buena ordenación. En 1935 Zorn publicó un trabajo en el que formulaba el principio maximal usándolo para probar varios teoremas del álgebra, conjeturando que dicho principio era equivalente al axioma de la elección y aparentando desconocer los trabajos de Hausdorff y Kuratowski. En 1940 Tuckey publicó una generalización del principio maximal demostrando que la "condición de Tuckey" (ver problema número 19 del capítulo V) es equivalente al axioma de la elección.

La proposición "todo conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena está acotada superiormente posee, al menos, un elemento maximal"

es conocida por el nombre de "lema de Zorn", nomenclatura que de acuerdo con lo expresado anteriormente no deja de ser bastante desafortunada.

El objetivo fundamental del presente capítulo es la demostración de que las proposiciones "lema de Zorn" y "axioma de Zermelo" son equivalentes al axioma de la elección (axioma VI de nuestra teoría), en el sentido de que partiendo de la teoría axiomática N-B-G y excluyendo el axioma VI entonces en la nueva axiomática obtenida, las proposiciones "lema de Zorn", "axioma de Zermelo" y "axioma de la elección" son lógicamente equivalentes; con lo cual resulta que si en la teoría axiomática N-B-G sustituimos el axioma de la elección como axioma VI por el lema de Zorn o bien por el axioma de Zermelo, entonces las teorías axiomáticas obtenidas son equivalentes, es decir proporcionan los mismos teoremas salvo, claro está, la proposición considerada en cada caso como axioma VI de la teoría.

Por todo ello, en el presente capítulo (y a excepción del teorema 4) prescindiremos del axioma VI de nuestra teoría axiomática.

□

Definición: Si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y B es un subconjunto de A, entonces diremos que B es una cadena de $(A,\leq)$ sí y sólo sí B es un conjunto totalmente ordenado respecto de la ordenación inducida.

Obviamente el conjunto vacío es una cadena de cualquier conjunto parcialmente ordenado.

Definición: Si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado entonces diremos que $(A,\leq)$ es inductivo sí y sólo sí toda cadena de $(A,\leq)$ está acotada superiormente.

Obviamente si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo, entonces $A \neq \emptyset$.

Proposición 1

Si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces el conjunto σ cuyos elementos son las cadenas de $(A,\leq)$ es inductivo por la relación de inclusión.

Demostración

Sea $C \neq \emptyset$ una cadena de $(\sigma,\subset)$ y consideremos

$$C_o = \bigcup_{C \in C} C$$

Veamos que C_o es una cadena de $(A,\leq)$. En efecto, si $x \in C_o$ e $y \in C_o$ entonces existen $D_1 \in C$ y $D_2 \in C$ tales que $(x \in D_1) \wedge (y \in D_2)$; ahora bien, puesto que C es una cadena de $(\sigma,\subset)$ resultará $(D_1 \subset D_2) \vee (D_2 \subset D_1)$ y por tanto $(x \in D_2 \wedge y \in D_2) \vee (x \in D_1 \wedge y \in D_1)$, de donde deducimos que x e y son comparables ya que D_1 y D_2 son cadenas de $(A,\leq)$.

Finalmente, C_o es cota superior de C en $(\sigma,\subset)$ ya que, si $D \in C$ y $x \in D$ entonces $x \in C_o$, luego $D \subset C_o$.

□

Proposición 2

Son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) Axioma de la elección

b) Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces existe un conjunto B tal que

$$(\forall x)(x\in A \Rightarrow (\exists y)(y\in A \wedge B\cap \bar{x} = \{y\}))$$

(dicho conjunto B recibe el nombre de conjunto de Zermelo de A relativo a R)

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b): Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A y f es una función de elección de A, entonces $A/R \subset P(A) - \{\emptyset\}$; veamos que $f(A/R)$ es un conjunto que posee un elemento y uno sólo de cada una de las clases de equivalencia.
Si $x\in A$ entonces $f(\bar{x})\in f(A/R)\cap \bar{x}$.
Además, si $y\in f(A/R)\cap \bar{x}$ entonces existe $\bar{z}\in A/R$ tal que $y = f(\bar{z}) \wedge y\in \bar{x}$, luego $y\in \bar{z}\cap \bar{x}$ y, por tanto, $\bar{z} = \bar{x}$. Es decir, $f(A/R)\cap \bar{x} = \{f(\bar{x})\}$.

b) $\Rightarrow$ a): Si $A = \emptyset$ entonces la aplicación $f = (\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ es una función de elección de A.
Supongamos $A \neq \emptyset$ y consideremos la clase

$$K = \{(B,x): B\in P(A)-\{\emptyset\} \wedge x\in B\}.$$

K es un conjunto por ser subclase de $(P(A)-\{\emptyset\}) \times A$. Definimos en K la relación R:

$$(B_1,x_1)\ R\ (B_2,x_2) \Leftrightarrow (B_1 = B_2)$$

que, trivialmente, es de equivalencia; y sea C un conjunto de Zermelo de K relativo a R. Sea f la aplicación de $P(A) - \{\emptyset\}$ en A definida así: si $B\in P(A) - \{\emptyset\}$ entonces $f(B) = x_1$ siendo (B,x_1) el elemento de la clase de equivalencia $\{(B,x)\}_{x\in B}$ perteneciente al conjunto de Zermelo C. Trivialmente, f es una función de elección de A.

□

LEMA DE ZORN: Todo conjunto parcialmente ordenado e inductivo posee, al menos, un elemento maximal. □

AXIOMA DE ZERMELO (o de la buena ordenación): En todo conjunto existe al menos, una buena ordenación. □

Teorema 1

(Axioma de la elección) ⇒ (Lema de Zorn)

Demostración:

Observemos, en primer lugar, que si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo, entonces $A \neq \emptyset$.

Veamos a continuación que la demostración del teorema se reduce a demostrar el siguiente lema:

Lema 1: Sea χ un subconjunto de $P(A)$ verificando

a) χ es no vacío.

b) $(\forall B)(\forall C)(B \in \chi \wedge C \subset B \Rightarrow C \in \chi)$

c) Si $A \neq \emptyset$ es una cadena de $(\chi, \subset)$, entonces $\bigcup_{B \in A} B \in \chi$.

En tales hipótesis, χ posee, al menos, un elemento maximal por la relación de inclusión.

Para ello, efectuemos las siguientes observaciones:

1.- Si B es una cadena de $(A,\leq)$ y no existe una cadena C de $(A,\leq)$ tal que $B \subsetneq C$, entonces toda cota superior de B ha de pertenecer a B, ya que si k es una cota superior de B y $k \notin B$ bastaría tener presente que $C = B \cup \{k\}$ es una cadena de $(A, \leq)$ tal que $B \subsetneq C$.

En resumen: toda cadena de $(A,\leq)$ tal que no exista otra cadena de $(A,\leq)$, que la contenga estrictamente, posee elemento máximo en $(A,\leq)$.

2.- El conjunto σ cuyos elementos son las cadenas de $(A,\leq)$, ve-

rifica las hipótesis del lema.

En efecto: a) σ es no vacío, ya que si $x \in A$, entonces $\{x\}$ es una cadena de $(A,\leq)$.

b) Si $B \in \sigma$ y $C \subset B$, entonces $C \in \sigma$ ya que todo subconjunto de uno totalmente ordenado también lo es por la ordenación inducida.

c) Si $\acute{A} \neq \emptyset$ es una cadena de $(\sigma,\subset)$, veamos que $\bigcup_{B \in \acute{A}} B \in \sigma$; para ello, sean $x \in \bigcup_{B \in \acute{A}} B$ e $y \in \bigcup_{B \in \acute{A}} B$. En tal situación existirán $B \in \acute{A}$ y $C \in \acute{A}$ tales que $(x \in B) \wedge (y \in C)$ y, puesto que $\acute{A}$ es una cadena de $(\sigma,\subset)$ resultará $(B \subset C) \vee (C \subset B)$. Por tanto, $(x \in C \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in B)$, en ambos casos x e y son comparables. Luego $\bigcup_{B \in \acute{A}} B$ es una cadena de $(A,\leq)$, es decir $\bigcup_{B \in \acute{A}} B \in \sigma$.

Supuesto demostrado el lema 1, de esta segunda observación deduciríamos que $(\sigma,\subset)$ posee, al menos, un elemento maximal, notémosle M. Ahora bien, puesto que M es una cadena de $(A,\leq)$ por ser elemento maximal de $(\sigma,\subset)$, deducimos de la primera observación que M posee elemento máximo; sea $m = \text{máx } M$ y veamos que, entonces m es un elemento maximal de $(A,\leq)$. En efecto, si $x \in A$ y $m \leq x$ entonces x es cota superior de M, luego de la primera observación resulta $x \in M$ y puesto que $m = \text{máx } M$ se verificará $x \leq m$, es decir $m = x$. Por tanto m es un elemento maximal de $(A,\leq)$, lo cual demuestra que el citado lema 1 es una condición suficiente para la verificación del lema de Zorn.

Demostración del lema 1

Para cada conjunto $B \in \chi$ definimos $\hat{B} = \{x: (x \in A) \wedge (B \cup \{x\} \in \chi)\}$ Trivialmente, $B \subset \hat{B}$ y, en general, $\hat{B}$ no tiene porqué pertenecer a χ.

Lema 2: Si $B \in \chi$ y $B = \hat{B}$, entonces B es un elemento maximal de $(\chi,\subset)$.

En efecto: si $B \in \chi$ es tal que $B = \hat{B}$ y existiera $C \in \chi$ tal que $B \subsetneq C$, entonces si $x \in C - B$ se verificaría

$B \cup \{x\} \subset C \in \chi$, luego $B \cup \{x\} \in \chi$ y, por tanto, $B \subsetneq \hat{B}$, contra lo supuesto.

Sea f una función de elección del conjunto A, a partir de la cual, definimos la siguiente aplicación g de χ en χ: si $B \in \chi$ entonces $g(B) = B$, si $\hat{B} - B = \emptyset$; y $g(B) = B \cup \{b\}$ si $\hat{B} - B \neq \emptyset$ y $b = f(\hat{B}-B)$.

Del lema 2 deducimos, inmediatamente, que la demostración del lema 1 y, por tanto, del teorema 1 se reduce a probar la existencia de un elemento $M \in \chi$ tal que $M = \hat{M}$, lo que, según la definición de g, equivale a demostrar la existencia de un elemento $M \in \chi$ tal que $g(M) = M$. Para ello es conveniente introducir un nuevo concepto.

Definición: Un subconjunto T de χ diremos que es una torre o t-sistema sí y sólo sí verifica las condiciones siguientes:

a) $\emptyset \in T$

b) $(\forall B)(B \in T \Rightarrow g(B) \in T)$

c) Si $S \neq \emptyset$ es una cadena de $(T, \subset)$, entonces $\bigcup_{S \in S} S \in T$.

Trivialmente, χ es una torre.

Lema 3: Si $T \neq \emptyset$ es un conjunto cuyos elementos son torres, entonces $\bigcap_{A \in T} A$ es una torre.

En efecto:

a) Puesto que $(\forall A)(A \in T \Rightarrow \emptyset \in A)$ deducimos, $\emptyset \in \bigcap_{A \in T} A$

b) Si $B \in \bigcap_{A \in T} A$ entonces $(\forall A)(A \in T \Rightarrow B \in A)$ luego, $(\forall A)(A \in T \Rightarrow g(B) \in A)$. Es decir, $g(B) \in \bigcap_{A \in T} A$.

c) Si $S \neq \emptyset$ es una cadena de $(\bigcap_{A \in T} A, \subset)$, entonces S es una cadena de $(A, \subset)$ para cada $A \in T$. Por tanto $(\forall A)(A \in T \Rightarrow \bigcup_{S \in S} S \in A)$, es decir $\bigcup_{S \in S} S \in \bigcap_{A \in T} A$.

□

Designaremos por T_o a la intersección de todas las torres. Veamos a continuación, las propiedades más importantes que verifica T_o.

1ª propiedad de T_o

Si $C_o \in T_o$ es un conjunto comparable, por la relación de inclusión, con todos los conjuntos pertenecientes a T_o, entonces $g(C_o)$ es comparable, por la relación de inclusión, con todos los conjuntos pertenecientes a T_o. (Obsérvese que siempre existe, al menos, un tal C_o: $\emptyset$).

Demostración:

Designemos por T^* el conjunto cuyos elementos son los conjuntos de T_o comparables, en todo lo que sigue, por la relación de inclusión, con $g(C_o)$. Por tanto, $T^* \subset T_o$.

Lema 4: T^* es una torre

En efecto:

a) $\emptyset \in T^*$, ya que $g(C_o)$ es comparable con $\emptyset$.

b) Si $B \in T^*$ entonces B es comparable con $g(C_o)$. Puesto que $B \in T_o$ y $g(B) \in T_o$ resulta que C_o será comparable con B y con $g(B)$.

Si $B = C_o$ entonces $g(B) \subset g(C_o)$.

Si $B \subsetneq C_o$ entonces $g(B) \subset C_o$, ya que, de lo contrario, si $C_o \subsetneq g(B)$ resultaría $B \subsetneq g(B)$, es decir, $B \subsetneq C_o \subsetneq g(B)$ lo cual es absurdo, ya que $g(B) - B$ posee a lo sumo un elemento.

Si $C_o \subsetneq B$ entonces, razonando como antes, llegamos a la conclusión $C_o \subset g(B)$, de donde resulta $g(C_o) \subset g(B)$.

c) Sea $S \neq \emptyset$ una cadena de $(T^*, \subset)$.

Si para cada $S \in S$ se verifica $S \subset g(C_o)$ entonces deducimos $\bigcup_{S \in S} S \subset g(C_o)$. Si existe $S \in S$ tal que $S \supset g(C_o)$, entonces resultará $\bigcup_{S \in S} S \supset g(C_o)$.

En ambos casos, $\bigcup_{S \in S} S$ es comparable con $g(C_o)$ y, por tanto, $\bigcup_{S \in S} S \in T^*$.

□

Consecuencia: puesto que T^* es una torre deducimos $T_o \subset T^*$ y, por tanto, $T^* = T_o$, lo que demuestra la primera propiedad de T_o.

□

2ª propiedad de T_o

$(T_o, \subset)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Demostración:

Designemos por T' el subconjunto de T_o comparable con todos los elementos de T_o.

Lema 5: T' es una torre.

a) Trivialmente, $\emptyset \in T'$

b) Si $C_o \in T'$ entonces, por la propiedad anteriormente demostrada, concluimos $g(C_o) \in T'$

c) Sea $S \neq \emptyset$ una cadena de $(T', \subset)$ y C un elemento de T_o. En tal situación, o bien para cada $S \in S$ se verifica $S \subset C$ y, por tanto, $\bigcup_{S \in S} S \subset C$, o bien existe un elemento $S \in S$ tal que $S \supset C$, en cuyo caso $\bigcup_{S \in S} S \supset C$. En ambos casos, pues, $\bigcup_{S \in S} S$ es comparable con $C \in T_o$ y, por tanto, $\bigcup_{S \in S} S \in T'$. □

Consecuencia: puesto que T' es una torre deducimos $T_o \subset T'$ y, por tanto, $T_o = T'$, lo que demuestra la segunda propiedad de T_o.

□

Finalmente, vamos a demostrar la existencia de un conjunto $M \in X$ tal que $g(M) = M$.

Consideremos $M = \bigcup_{C \in T_o} C$. Puesto que T_o es una torre y un conjunto totalmente ordenado, por la relación de inclusión, deducimos que $M \in T_o$ y, por tanto, $g(M) \in T_o$, luego $g(M) \subset M$. Teniendo presente que de la definición de g deducimos, inmediatamente, que $g(M) \supset M$, concluimos $g(M) = M$, lo que completa la demostración del lema 1 y, por tanto, la demostración del teorema 1.

□

Teorema 2

(Lema de Zorn) $\Rightarrow$ (Axioma de Zermelo)

Demostración:

Si $A = \emptyset$ entonces, trivialmente, la gráfica $\emptyset$ es una buena ordenación en $A = \emptyset$. Supongamos, pues, $A \neq \emptyset$.

Consideremos la clase $\mathcal{B} = \{(C,R): [C \subset A] \wedge [R \text{ es una buena ordenación en } A]\}$. Si $(C,R) \in \mathcal{B}$ entonces $(C,R) \subset P[P(C \cup R)] \subset P[P(A \cup (A \times A))]$. Luego $\mathcal{B}$ es un conjunto, obviamente, no vacío. Definimos en $\mathcal{B}$ la siguiente relación $\leq$: si $(C_i,R_i) \in \mathcal{B}$ y $(C_j,R_j) \in \mathcal{B}$, entonces

$$[(C_i,R_i) \leq (C_j,R_j)] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a)\ C_i \subset C_j \\ b)\ R_i = R_j|_{C_i} \\ c)\ (\forall x_i)(\forall x_j)(x_i \in C_i \wedge x_j \in C_j \wedge x_j\ R_j\ x_i \Rightarrow x_j \in C_i) \end{array}\right]$$

Veamos que $(\mathcal{B},\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado: en efecto,

a) La reflexividad de $\leq$ en $\mathcal{B}$ es inmediata.

b) Si $(C_i,R_i) \leq (C_j,R_j)$ y $(C_j,R_j) \leq (C_i,R_i)$, entonces $C_i \subset C_j$ y $C_j \subset C_i$. Luego, $C_i = C_j$ y, además $R_j|_{C_i} = R_i$ y $R_i|_{C_j} = R_j$, por tanto, $R_i = R_j$. Es decir, $(C_i,R_i) = (C_j,R_j)$, de donde sigue la antisimetría de $\leq$ en $\mathcal{B}$.

c) Si $(C_i,R_i) \leq (C_j,R_j)$ y $(C_j,R_j) \leq (C_k,R_k)$, entonces $C_i \subset C_j$ y $C_j \subset C_k$, luego, $C_i \subset C_k$.
Por otra parte se verifica $R_k|_{C_j} = R_j$ y $R_j|_{C_i} = R_i$, por tanto, $R_k|_{C_i} = R_i$.
Finalmente, si $x_i \in C_i \wedge x_k \in C_k \wedge x_k\ R_k\ x_i$, entonces, puesto que $C_i \subset C_j$ y $(C_j,R_j) \leq (C_k,R_k)$ deducimos $x_k \in C_j$, y teniendo presente que $R_k|_{C_j} = R_j$ y $(C_i,R_i) \leq (C_j,R_j)$, concluimos $x_k \in C_i$; lo que demuestra que $(C_i,R_i) \leq (C_k,R_k)$, es decir la transitividad de $\leq$ en $\mathcal{B}$.

Lema: $(\mathcal{B},\leq)$ es un conjunto inductivo.

En efecto: sea $\mathcal{C}\neq\emptyset$ una cadena de $(\mathcal{B},\leq)$. Notemos

$$C_1: \{C: (\exists R)((C,R)\in \mathcal{C})\} \quad y \quad C_2 = \{R: (\exists C)((C,R)\in \mathcal{C})\}$$

y consideremos $C^* = \bigcup_{C\in C_1} C$ y $R^* = \bigcup_{R\in C_2} R$. Puesto que $\mathcal{C}$ es una cadena de $(\mathcal{B},\leq)$ resulta, trivialmente, que (C^*,R^*) es un conjunto totalmente ordenado tal que si $(C_i,R_i)\in \mathcal{B}$, entonces $R^*|_{C_i} = R_i$.

Veamos que (C^*,R^*) es un conjunto bien ordenado; en efecto, si B es un subconjunto no vacío de C^* y consideramos un elemento $x\in B$ entonces, o bien $x = \text{mín } B$ o, en caso contrario, el conjunto $B_x = \{y: (y\in B \wedge y\ R^*\ x)\}$ es no vacío.

Ahora bien, si $x\in C_i\in C_1$, entonces para cada $y\in B_x\subset B$ (supongamos, $y\in C_j\in C_1$) se verificará (por ser $\mathcal{C}$ una cadena de $(\mathcal{B},\leq)$) o bien que $C_j\subset C_i$, en cuyo caso $y\in C_i$; o bien que $C_i\subset C_j$, en cuyo caso puesto que $y\ R^*\ x$ y $R^*|_{C_j} = R_j$, deducimos $y\in C_j$. En definitiva, $\emptyset \neq B_x\subset C_i$. Teniendo presente que (C_i,R_i) es un conjunto bien ordenado, existirá el elemento mínimo b de B_x en (C_i,R_i), que es el elemento mínimo de B en (C^*,R^*), ya que si $y\in B$ entonces o bien $b\ R^*\ y$ o, en caso contrario, $y\ R^*\ b$, y puesto que $b\ R^*\ x$ deducimos $y\ R^*\ x$, luego $y\in B_x\subset C_i$; por tanto, $b\ R_i\ y$, es decir, $b\ R^*\ y$.

Finalmente, vamos a probar que (C^*,R^*) es una cota superior de $\mathcal{C}$ en $(\mathcal{B},\leq)$. En efecto, si $(C,R)\in\mathcal{C}$ entonces $C\subset C^*$ y $R = R^*|_C$; por otra parte, si $x\in C\wedge y\in C^*\wedge y\ R^*\ x$, entonces, suponiendo que $y\in C_i\in C_1$ y teniendo presente que $\mathcal{C}$ es una cadena de $(\mathcal{B},\leq)$, se verificará o bien que $(C_i,R_i)\leq(C,R)$, en cuyo caso $y\in C$; o bien que $(C,R)\leq(C_i,R_i)$, en cuyo caso $x\in C_i\wedge y\in C_i$, luego $y\ R_i\ x$ y, por tanto, $y\in C$. Conclusión: $(C,R)\leq(C^*,R^*)$, lo que completa la demostración del lema.

□

Por tanto, puesto que $(\mathcal{B},\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo, del lema de Zorn, deducimos la existencia de un elemento maximal (C',R') de $(\mathcal{B},\leq)$.

Veamos, entonces, que $C' = A$. En efecto, de lo contrario, si $a \in A-C'$ y consideramos $C'' = C' \cup \{a\}$ resultaría que $R'' = R' \cup (C''\times\{a\})$ es una buena ordenación en C'', como se comprueba sin dificultad; luego $(C'',R'') \in \mathcal{B}$. Y, además, se verificaría $(C',R') < (C'',R'')$ ya que $C' \subsetneq C'' \wedge R''_{|C'} = R'$ y, si $x \in C' \wedge y \in C'' \wedge y\ R''\ x$, entonces $y \in C'$; lo cual contradiría la maximalidad de (C',R') en $(\mathcal{B},\leq)$.

Conclusión final: en el conjunto $A = C'$, existe, al menos, una buena ordenación: R'.

□

Teorema 3

(Axioma de Zermelo) ⇒ (Axioma de la elección)

Demostración:

Si $A = \emptyset$ entonces la aplicación $\emptyset_{\emptyset} = (\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ es una función de elección del conjunto $A = \emptyset$. Supongamos, pues, $A \neq \emptyset$.

Sea R una buena ordenación en A y, para cada $B \in P(A) - \{\emptyset\}$ notemos $m_B = \text{mín } B$.

En tal situación, si G es una relación de equivalencia en A, entonces el conjunto

$$E = \{x: (\exists y)(y \in A \wedge x = m_{\overline{y}})\}$$

es, trivialmente, un conjunto de Zermelo del conjunto A asociado a la relación de equivalencia G; por tanto, de la proposición 2, deduci-

mos la veracidad del axioma de la elección, tomando como hipótesis el axioma de Zermelo; lo que demuestra el teorema.

□

COROLARIO

Son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) Axioma de la elección.

b) Lema de Zorn

c) Axioma de Zermelo.

□

Terminaremos el presente capítulo con la demostración de un im-- portante teorema para conjuntos bien ordenados, a partir de nuestra axiomática, incluyendo el axioma VI en la que, por tanto, el lema de Zorn y el axioma de Zermelo serán teorema de nuestra teoría.

Teorema 4

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos bien ordenados, entonces, o bien $(A,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento de $(B,\leq)$, o bien $(B,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento de $(A,\leq)$.

Demostración:

Consideremos la clase

$$A = \{(S,f_S): [S \text{ es un segmento de } (A,\leq)] \wedge$$
$$\wedge [f_S \text{ es un isomorfismo de orden de } (S,\leq) \text{ en un segmento de } (B,\leq)]\}$$

Puesto que $A \subset P(A) \times P(P(P(P(P(A \cup B)))))$ resulta que A es un conjun to.

Definimos en A la siguiente relación:

$$[(S,f_S) \leq (S',f_{S'})] \Leftrightarrow [S \subset S' \wedge f_{S'|S} = f_S]$$

Trivialmente, $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Lema: $(A,\leq)$ es un conjunto ordenado inductivo.

En efecto: sea $C \neq \emptyset$ una cadena de $(A,\leq)$ y consideremos el conjunto $C_o = \text{dom } C$; notemos $T = \bigcup_{S \in C_o} S$ y definamos una aplicación f_T de T en B así: si $x \in T = \bigcup_{S \in C_o} S$ y $S \in C_o$ es tal que $x \in S$, entonces $f_T(x) = f_S(x)$.

Puesto que C es una cadena de $(A,\leq)$ resultará que si $S \in C_o$ $S' \in C_o$ y $x \in S \cap S'$, entonces

$$[(S,f_S) \leq (S',f_{S'})] \vee [(S',f_{S'}) \leq (S,f_S)]$$

de donde deducimos $(S \subset S' \wedge f_{S'|S} = f_S) \vee (S' \subset S \wedge f_{S|S'} = f_{S'})$ y, por tanto, la aplicación f_T de T en B está bien definida.

Queremos demostrar que (T,f_T) es una cota superior de C en $(A,\leq)$; en efecto, de la definición de T y de f_T, todo se reduce a probar que $(T,f_T) \in A$.

Puesto que la reunión de segmentos es un segmento, resultará que $T = \bigcup_{S \in C_o} S$ es un segmento de $(A,\leq)$ y $f_T(T) = \bigcup_{S \in C_o} f_S(S)$ es un segmento de $(B,\leq)$; además f_T es un isomorfismo de orden de $(T,\leq)$ en $(f_T(T),\leq)$, ya que si $x \in T \wedge y \in T \wedge x < y$, por ser C una cadena de $(A,\leq)$ existirá un elemento $(S,f_S) \in C$ tal que $x \in S$ e $y \in S$, luego $f_T(x) = f_S(x) < f_S(y) = f_T(y)$, lo que completa la demostración del lema.

□

Entonces, teniendo presente que $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo, del lema de Zorn deducimos la existencia de un elemento $(\bar{S},f_{\bar{S}}) \in A$ maximal de $(A,\leq)$. Pues bien, vamos a demostrar que en tal situación se verifica $(\bar{S} = A \vee f_{\bar{S}}(\bar{S}) = B)$, en cuyo caso o bien $(A,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento de $(B,\leq)$, o bien

$(B,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento de $(A,\leq)$, lo que completará la demostración del teorema.

En efecto, supongamos lo contrario, es decir que se verifique $(\bar{S} \neq A \wedge \wedge f_{\bar{S}}(\bar{S}) \neq B)$. Sean $x_o \in A$ e $y_o \in B$ elementos tales que $\bar{S} = S(x_o)$ y $f_{\bar{S}}(\bar{S}) = S(y_o)$. Consideremos $S^* = S(x_o) \cup \{x_o\}$ y definamos una aplicación f^* de S^* en $S(y_o) \cup \{y_o\}$ así:

$$f^*_{|\bar{S}} = f_{\bar{S}} \qquad y \qquad f^*(x_o) = y_o$$

Puesto que, trivialmente, f^* es un isomorfismo de orden de $(S^*,\leq)$ en $(S(y_o) \cup \{y_o\},\leq)$ deduciríamos que $(S^*,f^*) \in A$, $(\bar{S},f_{\bar{S}}) < (S^*,f^*)$, lo que contradiría la maximalidad de $(\bar{S},f_{\bar{S}})$ en $(A,\leq)$.

□

Corolario:

Todo subconjunto B de un conjunto bien ordenado $(A,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento de $(A,\leq)$.

En efecto: basta aplicar el teorema anterior, observando que $(B,\leq)$ es un conjunto bien ordenado por la ordenación inducida y que si $(A,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento de $(B,\leq)$, entonces dicho segmento coincide con B.

□ □

PROBLEMAS

1.- Prescindiciendo del axioma VI de la teoría de clases, demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) Lema de Zorn.

b) Si A es un conjunto entonces existe un elemento maximal de $(\mathcal{C}(A,\subset),\subset)$. ("todo conjunto posee, al menos, una cadena maximal por la relación de inclusión")

c) Si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado entonces existe un elemento maximal de $(\mathcal{C}(A,\leq),\subset)$.
("todo conjunto parcialmente ordenado posee, al menos, una cadena que es maximal por la relación de inclusión". Principio de maximalidad de Hausdorff o Lema de Kuratowski).

d) Si $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y B es una cadena de $(A,\leq)$ entonces existe una cadena de $(A,\leq)$ maximal, por la relación de inclusión, que contiene a B.

e) Si A es un conjunto no vacío tal que para cadena no vacía B de $(A,\subset)$ se verifica $\cup B \in A$, entonces $(A,\subset)$ posee, al menos, un elemento maximal.

Indicación: a) $\Rightarrow$ b). Pruébese que $(\mathcal{C}(A,\subset),\subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo utilizando el problema n°39 del capítulo II.

b) $\Rightarrow$ c). Aplíquese b) al conjunto $\mathcal{C}(A,\leq) = B$. Si M es un elemento maximal de $(\mathcal{C}(B,\subset),\subset)$ aplíquese el problema 39 del capítulo II para probar que $\cup M \in \mathcal{C}(A,\leq)$. Concluir que $\cup M$ es un elemento maximal de $(\mathcal{C}(A,\leq),\subset)$.

c) $\Rightarrow$ d). Si B es una cadena de $(A,\leq)$ considérese $\mathcal{C}_B(A,\leq) = \{C \in \mathcal{C}(A,\leq) : B \subset C\}$.

d) $\Rightarrow$ e). Si $\alpha \in A$ considérese una cadena B de $(A,\subset)$ maximal que contenga a $\{\alpha\}$ y pruébese que $\cup B$ es un elemento maximal de $(A,\subset)$.

e) $\Rightarrow$ a). Probar que el conjunto $B = \mathcal{C}(A,\leq)$ satisface las hipótesis de la proposición e). Finalmente, si M es un maximal de $(B,\subset)$ y α es una cota superior de M en $(A,\leq)$ pruébese que α es un maximal de $(A,\leq)$.

2.- Demostrar que en todo conjunto totalmente ordenado existen partes cofinales bien ordenadas, por la ordenación inducida.
Indicación: Téngase presente el problema n°38 del capítulo II y el apartado e) del ejercicio anterior.

3.- Sea (A,R) un conjunto parcialmente ordenado no vacío y supongamos que todo subconjunto de A bien ordenado por la ordenación inducida está acotado superiormente en (A,R). Demostrar que (A,R)

posee, al menos, un elemento maximal.
Indicación: Del problema 38 del cap. II (conservando su notación) y del apartado e) del problema 1 del presente capítulo, deducimos la existencia de un elemento maximal M de $(A,\leq)$. Si α es una cota superior de M en (A,R) pruébese que α es un elemento maximal de (A,R).

4.- Sea A un conjunto y designemos por $\mathcal{A}$ (respectivamente $\mathcal{A}_T$) la clase cuyos elementos son las relaciones de orden parcial (respectivamente, de orden total) en A. Demostrar que $\mathcal{A}_T$ es parte cofinal de $(\mathcal{A},\subset)$.
Indicación: Si $R\in\mathcal{A}$ considérese el conjunto $\mathcal{B} = \{S: S\in\mathcal{A}\wedge R\subset S\}$ y téngase presente el problema 14 del capítulo II.

4

EXISTENCIA DE CONJUNTOS: EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

§1. INTRODUCCION DEL CONJUNTO DE NUMEROS NATURALES

Definición: Si A es una clase entonces la clase siguiente de A, que notaremos A^+, es por definición la clase $A^+ = A \cup \{A\}$.

Obsérvese que si A es una clase propia, entonces $A^+ = \mathcal{U}$ y si $A \in \mathcal{U}$ entonces se verifica $(A^+ \in \mathcal{U} \wedge A \in A^+ \wedge A \subsetneq A^+)$

Proposición 1

Si A es un conjunto, entonces se verifica

$$(\forall x)(A \subset x \subset A^+ \Rightarrow A = x \vee x = A^+)$$

Demostración:

Si x es un conjunto verificando $A \subset x \subset A^+$, entonces, o bien $A \in x$ en cuyo caso $A^+ = A \cup \{A\} \subset x$ y, por tanto, $A^+ = x$; o bien $A \notin x$ en cuyo caso, puesto que $x \subset A^+ = A \cup \{A\}$, resultará $x \subset A$ y, por tanto, x = A. □

La proposición anterior nos permite asegurar que entre un conjunto y su siguiente no hay comprendido estrictamente, por la relación de inclusión, ningún conjunto.

Notación: En adelante, notaremos $\emptyset = 0$; $0^+ = 1$; $1^+ = 2$; $2^+ = 3$; $3^+ = 4$; $4^+ = 5$; ...

Asímismo, notaremos $\mathbb{N} - \{0\} = \mathbf{N}^*$.

AXIOMA IX (del infinito)

Existe un conjunto A_o que verifica:

$$[0 \in A_o \wedge (\forall x)(x \in A_o \Rightarrow x^+ \in A_o)]$$

□

El axioma del infinito nos asegura la existencia de, al menos, un conjunto: A_o; por tanto, la clase vacía $\emptyset$ será también un conjunto, por ser subclase de A_o. Consideremos la clase

$$A = \{x: (0 \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow y^+ \in x))\}.$$

Puesto que $A_o \in A$ resultará $A \neq \emptyset$.

Definición: La clase $\{x: (\forall A)(A \in A \Rightarrow x \in A)\} = \cap A$, que es un conjunto por se subclase de A_o y que notaremos por $\mathbf{N}$, la denominaremos conjunto de los números naturales.

Los elementos de $\mathbf{N}$ se denominan, números naturales.

Proposición 2 (Caracterización del conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales)

El conjunto de los números naturales es el único conjunto $\mathbf{N}$ que verifica, simultáneamente, las condiciones siguientes:

i) $0 \in \mathbf{N}$

ii) $(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x^+ \in \mathbf{N})$

iii) Si A es un conjunto tal que $(0 \in A) \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$ entonces $\mathbb{N} \subset A$.

Demostración:

Veamos, en primer lugar, que el conjunto $\mathbb{N}$ satisface esas tres propiedades.

i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \in A$. Luego $(\forall A)(A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \in A)$. Conclusión: $0 \in \cap \mathcal{A} = \mathbb{N}$

ii) Supongamos que $x \in \mathbb{N} = \cap \mathcal{A}$. En tal situación $(\forall A)(A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in A)$ Luego por definición de $\mathcal{A}$ resultará $(\forall A)(A \in \mathcal{A} \Rightarrow x^+ \in A)$. En consecuencia $x^+ \in \cap \mathcal{A} = \mathbb{N}$.

iii) Si A es un conjunto tal que $(0 \in A) \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$ entonces $A \in \mathcal{A}$ y, por tanto $\mathbb{N} = \cap \mathcal{A} \subset A$

Supongamos ahora que B fuese otro conjunto verificando

a) $0 \in B$

b) $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x^+ \in B)$

c) Si A es un conjunto tal que $(0 \in A) \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$ entonces $B \subset A$.

En tal situación:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} B \text{ verifica la propiedad c)} \\ (0 \in \mathbb{N}) \wedge (\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^+ \in \mathbb{N}) \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset \mathbb{N} \\ \left.\begin{array}{l} \mathbb{N} \text{ verifica la propiedad iii)} \\ (0 \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x^+ \in B) \end{array}\right\} \Rightarrow N \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B = \mathbb{N}$$

□

Teorema 1 (de inducción completa)

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ verificando

$$(0 \in A) \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Demostración:

$\mathbb{N}$ verifica la propiedad iii) (proposición 2) $(0 \in A) \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$ $\Rightarrow \mathbb{N} \subset A$

Pero en este caso $A \subset \mathbb{N}$

$\Rightarrow A = \mathbb{N}$

□

Proposición 3

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces se verifica $(\forall m)(m \in n \Rightarrow m \in \mathbb{N} \wedge m \subsetneq n)$.

Demostración:

Sea $A = \{x: (x \in \mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m \in x \Rightarrow m \in \mathbb{N} \wedge m \subsetneq x)\} \subset \mathbb{N}$. Trivialmente $0 \in A$; veamos que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$.

En efecto, si $m \in x^+ = x \cup \{x\}$ entonces, o bien $m = x$ y en tal caso $m = x \in \mathbb{N}$ y $m = x \subsetneq x^+$; o bien $m \in x$ y en tal caso, puesto que $x \in A$, resultará $m \in \mathbb{N}$ y $m \subsetneq x \subsetneq x^+$.

Conclusión: $A = \mathbb{N}$, lo que demuestra la proposición.

□

Proposición 4

$$(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge m \subsetneq n \Rightarrow m \in n)$$

Demostración:

Sea $A = \{x: (x \in \mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m \in \mathbb{N} \wedge m \subsetneq x \Rightarrow m \in x)\} \subset \mathbb{N}$. Trivialmente $0 \in A$; veamos que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$.

En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \subsetneq x^+$. Entonces, no puede verificarse $x \in m$ ya que, en tal caso, por la proposición anterior deduciríamos $x \subsetneq m \subsetneq x^+$, lo que es una contradicción. Por tanto, $x \notin m$ y puesto que $m \subsetneq x^+ = x \cup \{x\}$ resulta $m \subset x$. En tal situación si $m = x$ re-

sultará $m = x \in x^+$; y si $m \subsetneq x$ entonces, teniendo presente que $x \in A$, deducimos $m \in x \subset x^+$, luego $m \in x^+$.

Conclusión: $A = \mathbb{N}$, lo que demuestra la proposición. □

Proposición 5

Si m y n son números naturales, entonces $(m^+ = n^+) \Leftrightarrow (m = n)$.

Demostración:

Si existieran números naturales m y n tales que $m^+ = n^+$ y $m \neq n$, entonces $m \in m^+ = n^+ = n \cup \{n\}$, luego $m \in n$ y, por tanto, $m \subsetneq n$. Razonando análogamente, permutando m y n, obtendríamos $n \subsetneq m$. Es decir, se verificaría $(m \subsetneq n) \wedge (n \subsetneq m)$ que es una contradicción.

El recíproco es inmediato, ya que si $m = n$ entonces $m^+ = n^+$.

Proposición 6

Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces existe un único elemento $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $(\bar{n})^+ = n$.

Demostración:

En primer lugar, demostremos la existencia del tal número natural asociado a $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Supongamos lo contrario, es decir, que exista $n_o \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ se verifique $m^+ \neq n_o$ y consideremos $A = \mathbb{N} - \{n_o\}$.

Puesto que $n_o \in \mathbb{N} - \{0\}$ resulta $0 \in A$.

Además $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$, ya que si $x \in A \subset \mathbb{N}$ entonces $x^+ \in \mathbb{N}$ y $x^+ \neq n_o$ luego $x^+ \in A$.

Por tanto, del teorema de inducción completa concluiríamos $A = \mathbb{N}$, es decir, $\mathbb{N} - \{n_o\} = \mathbb{N}$ lo que es una contradicción.

Finalmente, si $\bar{n}$ y p son números naturales tales que $(\bar{n})^+ = p^+ = n$, entonces de la proposición anterior deducimos $\bar{n} = p$, de donde sigue la unicidad del tal elemento.

□

Definición: Si n es un número natural distinto de 0 (cero), entonces el número natural $\bar{n}$, cuya existencia y unicidad garantiza la proposición anterior, lo denominaremos el anterior de n.

De esta definición resulta, inmediatamente, que si n es un número natural, entonces $(\overline{n^+}) = n$.

□ □

§2. ORDENACION USUAL DE $\mathbb{N}$

Definición: Si $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$ entonces

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (x \subset y)$$

Trivialmente, $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

La ordenación $\leq$ recibe el nombre de ordenación usual de $\mathbb{N}$.

Como consecuencia inmediata de la anterior definición, se verifica:

a) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < n^+)$

b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow \bar{n} < n)$

Proposición 1

$$(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbf{N} \wedge n\in\mathbf{N} \Rightarrow (m<n \Leftrightarrow m^{+}\leq n))$$

Demostración:

Si m y n son números naturales tales que $m < n$, entonces $m\subsetneq n$, y de la proposición 4 del parágrafo anterior, resulta $m\in n$. Por tanto $m^{+} = m\cup\{m\}\subset n$, es decir $m^{+}\leq n$.

Recíprocamente, si m y n son números naturales tales que $m^{+}\leq n$, entonces $m < m^{+}\leq n$.

□

Proposición 2

$$(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbf{N} \wedge n\in\mathbf{N} - \{0\} \Rightarrow (m < n \Leftrightarrow m\leq \bar{n}))$$

Demostración:

Si $m\in\mathbf{N}$ y $n\in\mathbf{N} - \{0\}$ son tales que $m < n$, entonces $m\subsetneq n$, luego $m\in n = \bar{n}\cup\{\bar{n}\}$. Por tanto, o bien $m = \bar{n}$ y, en tal caso $m\leq \bar{n}$ o bien $m\neq \bar{n}$ y, en tal caso, $m\in\bar{n}$. Luego de la proposición 3 del parágrafo anterior deducimos $m\subsetneq\bar{n}$, es decir $m < \bar{n}$.

Recíprocamente, si $m\in\mathbf{N}$ y $n\in\mathbf{N} - \{0\}$ son tales que $m\leq\bar{n}$, entonces $m\leq\bar{n} < (\bar{n})^{+}$ y, por tanto, $m < n$.

□

Proposición 3

$$(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbf{N} \wedge n\in\mathbf{N} \Rightarrow (m < n \Leftrightarrow m^{+} < n^{+}))$$

Demostración:

Si m y n son números naturales tales que $m < n$, entonces

$m^+ \leq n < n^+$, luego $m^+ < n^+$.

Recíprocamente, si m y n son números naturales tales que $m^+ < n^+$, entonces $m^+ \leq (\overline{n^+}) = n$, luego $m^+ \leq n$ y, por tanto, $m < m^+ \leq n$.

□

Teorema 1

$(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.

Demostración:

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Si $0 \in A$ entonces, trivialmente, $0 = \text{mín } A$. Supongamos, pues, que $0 \notin A$ y consideremos el conjunto

$$B = \{x: (x \in \mathbb{N}) \wedge (\forall y)(y \in A \Rightarrow x < y)\} \subset \mathbb{N}$$

Puesto que $A \cap B = \emptyset$ y $A \neq \emptyset$ deducimos $B \neq \mathbb{N}$; por tanto, B no puede verificar las hipótesis del teorema de inducción completa. Teniendo presente que $0 \in B$ deducimos la existencia de un elemento $b \in B$ tal que $b^+ \notin B$.

Puesto que $b^+ \notin B$ existirá un elemento $a \in A$ tal que, la proposición "$b^+ < a$" es falsa; por otra parte, como $b \in B$ resultará que, para cada $y \in A$ se verifica $b < y$. Por tanto $b^+ \leq y$, en particular, $b^+ \leq a$, de donde deducimos $b^+ = a$, ya que la proposición "$b^+ < a$" es falsa.

Finalmente, basta observar que

$$(\forall y)(y \in A \Rightarrow b^+ = a \leq y)$$

para concluir que $a = \text{mín } A$.

□

Es interesante observar que el conjunto siguiente de un número natural es, precisamente, el elemento siguiente de dicho número natural por la ordenación usual.

De este teorema, resulta que $(\mathbb{N},\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y, además, todo subconjunto no vacío, acotado superiormente en $(\mathbb{N},\leq)$ posee supremo en $(\mathbb{N},\leq)$, por ser $(\mathbb{N},\leq)$ un conjunto bien ordenado.

Pues bien, vamos a probar que, en el caso del conjunto de los números naturales, respecto de la ordenación usual, esta última propiedad (también conocida por el nombre de "propiedad del supremo") podemos precisarla más.

Teorema 2 (del extremo)

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y acotado superiormente en $(N,\leq)$ posee elemento máximo en $(\mathbb{N},\leq)$.

Demostración:

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, acotado superiormente en $(\mathbb{N},\leq)$, y consideremos el conjunto

$$B = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (x \text{ es cota superior de } A \text{ en } (\mathbb{N},\leq))\}$$

que es no vacío, por hipótesis; sea $b = \text{mín } B$.

Si $b = 0$ entonces $A = \{0\}$ y, por tanto, $0 = \text{máx } A$. Si, en cambio, $b \neq 0$ entonces $\bar{b} \notin B$, luego existirá un elemento $a \in A$ tal que $\bar{b} < a$, de donde resulta $b = (\bar{b})^{+} \leq a$. Por otra parte, puesto que $b \in B$ se verificará $a \leq b$ y, por tanto, $b = a \in A$. Es decir, $a \in A$ es una cota superior de A en $(\mathbb{N},\leq)$; luego, $a = \text{máx } A$.

□

Proposición 4

Si n es un número natural y A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ veri

ficando $(n \in A) \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x^{+} \in A)$, entonces $A \supset [n,\rightarrow[$

Demostración:

Basta observar que, en tal situación, el conjunto $B = A \cup [0,n[$ verifica las hipótesis del teorema de inducción completa y, por tanto $B = \mathbb{N}$, de donde resulta que $A \supset [n,\rightarrow[$.

□

Proposición 5

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = S(n))$$

Demostración:

Si $x \in n$ entonces $x \in \mathbb{N}$ y $x \subsetneq n$, luego $x \in \mathbb{N} \wedge x < n$. Por tanto $x \in S(n)$.

Recíprocamente, si $x \in S(n)$ entonces $x \in \mathbb{N} \wedge x < n$, luego, $x \subsetneq n$. Por tanto $x \in n$.

□

Para finalizar el presente parágrafo, vamos a dar el ejemplo de una ordenación R en $\mathbb{N}$ respecto de la cual $\mathbb{N}$ posea un único elemento maximal y, en cambio, carezca de elemento máximo.

Si $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$ entonces por definición:

$$[(x,y) \in R] \Leftrightarrow [(x \neq 0 \wedge x \leq y) \vee (x = 0 \wedge y = 0)]$$

Se comprueba, sin dificultad, que (N,R) es un conjunto parcialmente, no totalmente ordenado, cuyo único elemento maximal es 0 y, en cambio, carece de elemento máximo.

□ □

§3. SUMA Y PRODUCTO DE NUMEROS NATURALES

El objetivo del presente parágrafo es introducir en el conjunto de los números naturales, dos operaciones internas (aplicaciones de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$), cuya existencia y unicidad demostraremos, basándonos en una variante del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita; y analizar las propiedades más interesantes de dichas operaciones.

Teorema 1 (de recurrencia transfinita en $\mathbb{N}$)

Sea $m\in\mathbb{N}$, B un conjunto no vacío, α un elemento de B y g una aplicación de B en B. En tal situación, existe una única aplicación $\Phi_{m,\alpha,g}$ de $[m,\to[$ en B verificando:

a) $\Phi_{m,\alpha,g}(m) = \alpha$

b) $(\forall x)(x\in[m,\to[\Rightarrow \Phi_{m,\alpha,g}(x^+) = g[\Phi_{m,\alpha,g}(x)])$

Demostración:

Consideremos el conjunto bien ordenado $([m,\to[,\leq)$ y la función de recurrencia H, del tipo $([m,\to[-\{m\},\leq)$ en B, definida así: si $x\in]m,\to[$ y $f\in F(S(x);B)$, entonces $H(f) = g[f(\bar{x})]$.

Dado $\alpha\in B$, el corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (cap. II, §5; pág. 149) nos asegura la existencia de una única aplicación $\Phi_{m,\alpha,g}$ de $[m,\to[$ en B, tal que verifica

a) $\Phi_{m,\alpha,g}(m) = \alpha$

b) $(\forall x)(x\in[m,\to[\Rightarrow \Phi_{m,\alpha,g}(x^+) = H(\Phi_{m,\alpha,g}|_{S(x^+)}) = g[\Phi_{m,\alpha,g}(\overline{x^+})] =$

$= g[\Phi_{m,\alpha,g}(x)])$

□

Corolario 1

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ existe una única aplicación φ_n de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ verificando:

a) $\varphi_n(0) = n$
b) $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_n(x^+) = [\varphi_n(x)]^+)$

En efecto: aplicando el teorema anterior al esquema

$$B = \mathbb{N}; \quad \alpha = n; \quad m = 0; \quad g(x) = x^+ \quad (\forall x \in \mathbb{N})$$

deducimos la existencia de una única aplicación $\Phi_{0,n,g}$, que notaremos φ_n, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tal que

a) $\varphi_n(0) = n$
b) $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_n(x^+) = g[\varphi_n(x)] = [\varphi_n(x)]^+)$

□

Corolario 2

Existe una única aplicación φ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ verificando las condiciones:

a) $(\forall m)(m \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(m,0) = m)$
b) $(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(m,n^+) = [\varphi(m,n)]^+)$

En efecto: la existencia de la tal aplicación se deduce del corolario anterior considerando, para cada $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\varphi(m,n) = \varphi_m(n)$$

Para demostrar la unicidad de dicha aplicación, sea $f \in F(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N})$ tal que

a) $(\forall m)(m \in \mathbb{N} \Rightarrow f(m,0) = m)$
b) $(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(m,n^+) = [f(m,n)]^+)$

Si para cada $m \in \mathbb{N}$ notamos $A_m = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (\varphi(m,n) = f(m,n))\} \subset \mathbb{N}$, entonces $0 \in A_m$ trivialmente y, además, $(\forall x)(x \in A_m \Rightarrow x^+ \in A_m)$ ya que si $x \in A_m$ resulta $\varphi(m,x^+) = [\varphi(m,x)]^+ = [f(m,x)]^+ = f(m,x^+)$, por tanto, $x^+ \in A_m$; es decir, $A_m = \mathbb{N}$.

Conclusión: $(\forall m)(m \in \mathbb{N} \Rightarrow A_m = \mathbb{N})$, luego $f = \varphi$.

□

Definición: A la aplicación φ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, cuya existencia y unicidad garantiza el corolario anterior, la denominaremos operación suma en $\mathbb{N}$. Para cada $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ notaremos $\varphi(m,n) = m+n$ y diremos que el número natural $m+n$ es la suma de los números naturales m y n.

Corolario 3

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ existe una única aplicación ψ_n de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ verificando:

a) $\psi_n(0) = 0$
b) $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi_n(x^+) = n + \psi_n(x))$

En efecto: aplicando el teorema 1 al esquema

$$B = \mathbb{N}; \quad \alpha = 0; \quad m = 0; \quad g = \varphi_n$$

deducimos la existencia de una única aplicación $\Phi_{0,0,\varphi_n}$, que notaremos ψ_n, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tal que

a) $\psi_n(0) = 0$
b) $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi_n(x^+) = \varphi_n[\psi_n(x)] = n + \psi_n(x))$

□

Corolario 4

Existe una única aplicación ψ de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ verificando las condiciones:

a) $(\forall m)(m\in\mathbb{N} \Rightarrow \psi(m,0) = 0)$

b) $(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbb{N} \wedge n\in\mathbb{N} \Rightarrow \psi(m,n^+) = m+\psi(m,n))$

En efecto: la existencia de la tal aplicación se deduce del corolario anterior considerando, para cada $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$\psi(m,n) = \psi_m(n)$$

Para demostrar la unicidad de dicha aplicación, sea $f \in F(\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ \mathbb{N})$ tal que

a) $(\forall m)(m\in\mathbb{N} \Rightarrow f(m,0) = 0)$

b) $(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbb{N} \wedge n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(m,n^+) = m + f(m,n))$

Si para cada $m\in\mathbb{N}$ notamos $A_m = \{n:\ (n\in\mathbb{N}) \wedge (\psi(m,n) = f(m,n))\} \subset \mathbb{N}$, entonces $0\in A_m$ trivialmente y, además, $(\forall x)(x\in A_m \Rightarrow x^+\in A_m)$ ya que si $x\in A_m$ resulta $\psi(m,x^+) = m+\psi(m,x) = m+f(m,x) = f(m,x^+)$, por tanto $x^+\in A_m$; es decir, $A_m = \mathbb{N}$.

Conclusión: $(\forall m)(m\in\mathbb{N}\Rightarrow A_m=\mathbb{N})$, luego $f = \psi$.

□

Definición: A la aplicación ψ de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, cuya existencia y unicidad garantiza el corolario anterior, la denominaremos operación producto en $\mathbb{N}$. Para cada $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ notaremos $\psi(m,n) = m\cdot n$ y diremos que el número natural $m\cdot n$ es el producto de los números naturales m y n.

Propiedades de la suma de números naturales

Proposición 1 (Asociatividad de la suma en $\mathbb{N}$)

$$(\forall m)(\forall n)(\forall p)(m\in\mathbb{N} \wedge n\in\mathbb{N} \wedge p\in\mathbb{N} \Rightarrow m+(n+p) = (m+n)+p)$$

Demostración:

Veremos que la asociatividad de la suma en $\mathbb{N}$ es consecuencia inmediata del siguiente lema:

Lema: $(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbb{N} \wedge n\in\mathbb{N} \Rightarrow \varphi_{m+n} = \varphi_m \circ \varphi_n)$

En efecto: consideremos el conjunto

$$A = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (\varphi_{m+n}(x) = (\varphi_m \circ \varphi_n)(x))\} \subset \mathbb{N}$$

Se verifica $0\in A$ ya que $\varphi_{m+n}(0) = m+n$ y $(\varphi_m \circ \varphi_n)(0) = \varphi_m[\varphi_n(0)] = \varphi_m(n) = m+n$. Veamos que $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x^+\in A)$. En efecto, si $x\in A$ entonces se verifica:

$$\varphi_{m+n}(x^+) = [\varphi_{m+n}(x)]^+ = [(\varphi_m \circ \varphi_n)(x)]^+ = [\varphi_m(\varphi_n(x)]^+ = \varphi_m[(\varphi_n(x))^+] = \varphi_m[\varphi_n(x^+)] = (\varphi_m \circ \varphi_n)(x^+);$$

por tanto $x^+\in A$, luego del teorema de inducción completa deducimos $A = \mathbb{N}$, lo que demuestra el lema.

Del lema resultará que si m,n y p son números naturales, entonces

$$m+(n+p) = \varphi_m(n+p) = \varphi_m[\varphi_n(p)] = (\varphi_m \circ \varphi_n)(p) = \varphi_{m+n}(p) = (m+n)+p$$

□

Proposición 2

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N} \Rightarrow 0 + n = n + 0 = n)$$

Demostración:

Puesto que la aplicación $I_{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ verifica $I_{\mathbb{N}}(0) = 0$ y

$(\forall m)(m\in\mathbb{N} \Rightarrow I_{\mathbb{N}}(m^+) = m^+ = (I_{\mathbb{N}}(m))^+)$ de la unicidad de ω_o deducimos que $\omega_o = I_{\mathbb{N}}$ y, por tanto, para cada $n\in\mathbb{N}$ se verificará

$$0 + n = \omega_o(n) = n = \omega_n(0) = n + 0.$$

□

Proposición 3 (Conmutatividad de la suma en $\mathbb{N}$)

$$(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbb{N} \wedge n\in\mathbb{N} \Rightarrow m+n = n+m)$$

Demostración:

Consideremos el conjunto

$$A = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m\in\mathbb{N} \Rightarrow m+x = x+m)\} \subset \mathbb{N}$$

De la proposición anterior resulta que $0\in A$.

Veamos entonces que $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x^+\in A)$; para ello nos basaremos en el siguiente lema:

Lema: $(\forall m)(\forall x)(m\in\mathbb{N} \wedge x\in\mathbb{N} \Rightarrow (x+m)^+ = x^+ + m)$

En efecto: si $x\in\mathbb{N}$ consideramos la aplicación $f \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida así: para cada $m\in\mathbb{N}$, $f(m) = [\varphi_x(m)]^+$; dicha aplicación verifica

a) $f(0) = [\omega_x(0)]^+ = x^+$

b) $(\forall y)(y\in\mathbb{N} \Rightarrow f(y^+) = [\varphi_x(y^+)]^+ = [(\varphi_x(y))^+]^+ = [f(y)]^+$

y, por tanto, de la unicidad de la aplicación φ_{x^+} deducimos $f = \varphi_{x^+}$, luego para cada $m\in\mathbb{N}$ resultará $(x+m)^+ = [\varphi_x(m)]^+ = f(m) = \varphi_{x^+}(m) = x^+ + m$. □

Si suponemos que $x\in A$, entonces para cada $m\in\mathbb{N}$ obtenemos

$$m+x^+ = \omega_m(x^+) = [\omega_m(x)]^+ = [\varphi_x(m)]^+ = \varphi_{x^+}(m) = x^+ + m.$$

Por tanto $x^+\in A$, es decir $A = \mathbb{N}$. □

Por verificarse las tres proposiciones, diremos que $(\mathbb{N},+)$ es un semigrupo o monoide unitario y conmutativo.

Proposición 4

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N} \Rightarrow n^{+} = n+1)$$

Demostración:

Basta tener presente que para cada $n\in\mathbb{N}$ se verifica

$$n+1 = \varphi_n(1) = \varphi_n(0^{+}) = [\varphi_n(0)]^{+} = n^{+}$$

Proposición 5 (Ley de monotonía)

Si p,q y m son números naturales, entonces se verifica

$$(p < q) \Leftrightarrow (m+p < m+q)$$

Demostración:

Supongamos $p < q$ y consideremos el conjunto

$$A = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (x+p < x+q)\} \subset \mathbb{N}$$

Trivialmente $0\in A$; veamos que $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x^{+}\in A)$. En efecto:

$$x^{+}+p = (x+p)^{+} < (x+q)^{+} = x^{+} + q,$$

luego $x^{+}\in A$; por tanto $A=\mathbb{N}$.

Recíprocamente, si $p\geq q$ entonces, o bien $p=q$ en cuyo caso $m+p = m+q$, o bien $p > q$ en cuyo caso $m+p > m+q$. En consecuencia, por la ley del contrarrecíproco inferimos $m+p < m+q \Rightarrow p < q$.

□

Proposición 6 (Ley de simplificación)

Si p, q y m son números naturales, entonces se verifica

$$(p = q) \Leftrightarrow (m+p = m+q)$$

Demostración:

Si $p=q$ entonces para cada $m\in\mathbb{N}$ se verifica, trivialmente, que $m+p = m+q$.

Recíprocamente, si existieran números naturales p,q y m tales que $m+p = m+q$ y $p \neq q$, entonces o bien $p < q$ y en tal caso $m+p < m+q$, o bien $q < p$ y en tal caso $m+q < m+p$. □

La proposición anterior suele expresarse, también, diciendo que todo número natural es regular respecto de la suma.

Proposición 7

Si p y q son números naturales tales que $p < q$, entonces existe un único número natural m, distinto de cero, tal que $q = p+m$.

Demostración:

Para demostrar la existencia del tal número natural, consideremos el conjunto $A = \{x: x\in\mathbb{N} \wedge p+x \geq q\}$.

Puesto que $q\in A$, resulta que A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$; sea $m = \text{mín } A$. Teniendo presente que $p < q$ deducimos que $0\notin A$ y, por tanto, $m \neq 0$, luego existirá $\bar{m}\in\mathbb{N}$. Además $\bar{m}\notin A$ ya que $\bar{m} < m$, es decir se verificará $p+\bar{m} < q$, de donde resulta $p+m = p+(\bar{m})^+ = (p+\bar{m})^+ \leq q$.

Por otra parte, $p+m \geq q$ ya que $m\in A$; de donde concluimos $p+m = q$.

Finalmente, si m y n son números naturales tales que $p+m = q = p+n$, entonces de la ley de simplificación deducimos $m = n$; de donde sigue la unicidad del número natural distinto de cero m, tal que $p+m = q$.

Notación: Si p y q son números naturales tales que $p < q$, entonces el único número natural distinto de cero m verificando $p+m = q$, lo notaremos $m = q-p$.
Trivialmente, si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces $\bar{n} = n-1$.
Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ notaremos, asímismo, $0 = n-n$.

Propiedades del producto de números naturales

Proposición 8

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0)$$

Demostración:

Puesto que la aplicación $f \in F(\mathbb{N}; \mathbb{N})$ definida por $f(n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ satisface $f(0) = 0$ y $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x^+) = f(x)+0)$, de la unicidad de ψ_o deducimos que $f = \psi_o$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verificará

$$n \cdot 0 = \psi_n(0) = 0 = \psi_o(n) = 0 \cdot n$$

□

Proposición 9 (Conmutatividad del producto en $\mathbb{N}$)

$$(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \cdot n = n \cdot m)$$

Demostración:

Consideremos el conjunto $A = \{x: (x \in \mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \cdot x = x \cdot m)\}$

y probemos que $A=\mathbb{N}$; en efecto, de la proposición anterior resulta que $0\in A$. Veamos, entonces, que $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x^+\in A)$, para ello nos basaremos en el siguiente lema:

Lema: $(\forall m)(\forall x)(m\in\mathbb{N} \wedge x\in\mathbb{N} \Rightarrow x^+\cdot m = x\cdot m + m)$.

En efecto: si $x\in\mathbb{N}$, la aplicación $f \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida, para cada $m\in\mathbb{N}$, así $f(m) = \psi_x(m)+m$ satisface $f(0) = \psi_x(0) + 0 = 0 + 0 = 0$ y, además, para cada $m\in\mathbb{N}$ resulta

$$f(m^+) = \psi_x(m^+)+m^+ = \psi_x(m) + x + m^+ = \psi_x(m) + m + x^+ = f(m) + x^+;$$

luego, de la unicidad de la aplicación ψ_{x^+} deducimos $f = \psi_{x^+}$; es decir, para cada $m\in\mathbb{N}$ se verificará:

$$x^+\cdot m = \psi_{x^+}(m) = f(m) = \psi_x(m)+m = xm + m \qquad \square$$

Si suponemos entonces que $x\in A$, para cada $m\in\mathbb{N}$ obtendremos

$$x^+\cdot m = \psi_{x^+}(m) = \psi_x(m) + m = \psi_m(x) + m = \psi_m(x^+) = m\cdot x^+$$

luego $x^+\in A$, y por tanto $A = \mathbb{N}$.

$\square$

Proposición 10

$(\forall n)(n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\cdot 1 = 1\cdot n = n)$

Demostración:

Puesto que la aplicación $I_{\mathbb{N}}$ verifica:

$$I_{\mathbb{N}}(0) = 0 \qquad y \qquad (\forall m)(m\in\mathbb{N} \Rightarrow I_{\mathbb{N}}(m^+) = m^+ = m+1 = I_{\mathbb{N}}(m)+1)$$

de la unicidad de ψ_1 deducimos que $\psi_1 = I_{\mathbb{N}}$ y, por tanto, para cada $n\in\mathbb{N}$ se verificará

$$1\cdot n = \psi_1(n) = n = 0+n = \psi_n(0)+n = \psi_n(0^+) = \psi_n(1) = n\cdot 1 \qquad \square$$

Proposición 11 (Distributividad del producto respecto de la suma)

Si m,n y p son números naturales entonces se verifica

$$(m+n)\cdot p = m\cdot p + n\cdot p$$

Demostración:

Sea $A = \{x\in\mathbb{N}:$ Si $m\in\mathbb{N}$ y $n\in\mathbb{N}$ entonces $(m+n)\cdot x = m\cdot x + n\cdot x\}$. De las proposiciones 2 y 8 resulta $0\in A$. Veamos que $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x^{+}\in A)$ Supongamos que $x\in A$ y sean $m\in\mathbb{N} \wedge n\in\mathbb{N}$. En tal situación

$$(m+n)\cdot x^{+} = \psi_{m+n}(x^{+}) = (m+n) + \psi_{m+n}(x) \underset{x\in A}{=} (m+n) + (m\cdot x + n\cdot x) =$$

$$= (m + m\cdot x) + (n + n\cdot x) = \psi_{m}(x^{+}) + \psi_{n}(x^{+}) = m\cdot x^{+} + n\cdot x^{+}$$

Luego $x^{+}\in A$. En consecuencia $A = \mathbb{N}$, lo que establece la proposición.

□

Corolario

Si m,n y p son números naturales tales que $n \geq p$, entonces, se verifica $m\cdot(n-p) = m\cdot n - m\cdot p$.

En efecto: basta tener presente que si $n \geq p$ entonces resulta $m\cdot n = m\cdot[(n-p)+p] = m\cdot(n-p) + m\cdot p$

□

Proposición 12 (Asociatividad del producto en $\mathbb{N}$)

Si m,n y p son números naturales entonces se verifica:

$$(m\cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)$$

Demostración:

Para la demostración de esta proposición, nos basaremos en el siguiente lema:

Lema: $(\forall m)(\forall n)(m\in\mathbb{N} \wedge n\in\mathbb{N} \Rightarrow \psi_{m\cdot n} = \psi_m \circ \psi_n)$.

En efecto: consideremos el conjunto

$$A = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (\psi_{m\cdot n}(x) = (\psi_m \circ \psi_n)(x))\} \subset \mathbb{N}$$

Puesto que $\psi_{m\cdot n}(0) = 0 = \psi_m[\psi_n(0)]$ resulta $0\in A$. Si $x\in A$ entonces

$$\psi_{m\cdot n}(x^+) = \psi_{m\cdot n}(x) + m\cdot n = (\psi_m \circ \psi_n)(x) + m\cdot n = \psi_m[\psi_n(x)] + m\cdot n =$$

$$= \psi_m[\psi_n(x)+n] = \psi_m[\psi_n(x^+)] = (\psi_m \circ \psi_n)(x^+).$$

Por tanto $x^+\in A$. Luego $A = \mathbb{N}$. □

Del lema anterior deducimos que, si m,n y p son números naturales, entonces obtenemos

$$(m\cdot n)\cdot p = \psi_{m\cdot n}(p) = \psi_m[\psi_n(p)] = m\cdot(n\cdot p).$$

□

Por ser $(\mathbb{N},+)$ un semigrupo unitario y conmutativo y por verificar el producto las propiedades, asociativa , conmutativa, distributiva respecto de la suma, y poseer elemento neutro (proposición 10), diremos que $(\mathbb{N},+,\cdot)$ es un semianillo unitario y conmutativo.

Proposición 13

Si m y n son números naturales entonces se verifica

$$(m \neq 0 \wedge n \neq 0) \Leftrightarrow (m\cdot n \neq 0)$$

Demostración:

Si m y n son número naturales distintos de cero, entonces

$$m\cdot n = \psi_m(n) = \psi_m[(\bar{n})^+] = \psi_m(\bar{n}) + m \geq m > 0,$$

luego $m\cdot n \neq 0$.

Recíprocamente, si $m = 0$ ó $n = 0$, de la proposición 8 deduciríamos $m\cdot n = 0$.

□

Esta última propiedad la expresaremos diciendo que $(\mathbb{N},+,\cdot)$ carece de divisores de cero.

Proposición 14 (Ley de monotonía)

Si p y q son números naturales y $m\in\mathbb{N} - \{0\}$, entonces, se verifica $(p < q) \Leftrightarrow (m\cdot p < m\cdot q)$

Demostración:

Si p y q son números naturales tales que $p < q$, entonces existe $r\in\mathbb{N} - \{0\}$ verificando $q = p+r$; por tanto, para cada $m\in\mathbb{N} - \{0\}$ resultará

$$m\cdot q = m\cdot(p+r) = m\cdot p + m\cdot r > m\cdot p$$

Recíprocamente, si $p\in\mathbb{N} \wedge q\in\mathbb{N} \wedge m\in\mathbb{N} - \{0\}$ verifican $m\cdot p < m\cdot q$ entonces $p < q$ ya que, de lo contrario $p \geq q$. Luego, o bien $p = q$ y en tal caso $m\cdot p = m\cdot q$, o bien $p > q$ y en tal caso $m\cdot p > m\cdot q$.

□

Corolario

Si $n\in\mathbb{N} - \{1\}$ entonces no existe un número natural $p\in\mathbb{N}$ tal que $n\cdot p = 1$.

En efecto: supongamos que $n \in \mathbf{N} - \{1\}$ fuese un número natural para el que existiera $p \in \mathbf{N}$ verificando $n \cdot p = 1$ (en tal caso, los números naturales n y p tendrían que ser distintos de cero). Teniendo presente que $1 < n$ concluiríamos $1 \cdot p < n \cdot p$ y, por tanto, $p < 1$: lo que es una contradicción.

□

Proposición 15 (Ley de simplificación)

Si p y q son números naturales y $m \in \mathbf{N} - \{0\}$, entonces se verifica: $(p = q) \Leftrightarrow (m \cdot p = m \cdot q)$.

Demostración:

Si $p = q$ entonces, trivialmente, para cada $m \in \mathbf{N}$ resultará $m \cdot p = m \cdot q$.

Recíprocamente, si $p \in \mathbf{N} \wedge q \in \mathbf{N} \wedge m \in \mathbf{N} - \{0\} \wedge p \neq q$, entonces o bien $p < q$ y en tal caso $m \cdot p < m \cdot q$; o bien $p > q$ y en tal caso $m \cdot p > m \cdot q$.

□

Esta proposición la expresamos diciendo que todo número natural, distinto de cero, es regular respecto del producto.

Proposición 16 (de Arquímedes)

Si $n \in \mathbf{N}$ y $m \in \mathbf{N} - \{0\}$ entonces existe un número natural $p \in \mathbf{N}$ tal que $n < m \cdot p$

Demostración:

Supongamos lo contrario; es decir, que existieran $n \in \mathbf{N}$ y $m \in \mathbf{N} - \{0\}$ tales que, para cada $p \in \mathbf{N}$ se verificara $n \geq m \cdot p$. En tal situación, el conjunto $A = \{x: (x \in \mathbf{N}) \wedge (\exists p)(p \in \mathbf{N} \wedge x = m \cdot p)\}$ es un subconjunto

no vacío de $\mathbf{N}$ y acotado superiormente (n es una cota superior de A); del teorema del extremo deducimos la existencia de $a = \text{máx } A$ y, por tanto, si $p_o \in \mathbf{N}$ es tal que $a = m \cdot p_o$, entonces puesto que $p_o < p_o^+$ y $m \neq 0$ resultará $m \cdot p_o < m \cdot p_o^+$, es decir, $a < m \cdot p_o^+ \in A$, lo que contradice que a sea el elemento máximo de A.

□

Proposición 17

Si m,n y p son números naturales tales que $m \cdot n = p$ y $0 \leq p < m$, entonces $n = p = 0$.

Demostración:

Supongamos que existieran números naturales m, n y p verificando $m \cdot n = p$ y $0 < p < m$. En tal situación resultaría $0 = 0 \cdot n \leq p \cdot n \leq m \cdot n = p$, es decir $0 \leq p \cdot n \leq p$, de donde, teniendo presente que $p > 0$, obtenemos $n = 0$, en cuyo caso $p = m \cdot n = 0$: lo que es una contradicción. Por tanto $p = 0$, y puesto que $m > 0$ concluimos $n = 0$.

□

Proposición 18 (División euclídea en $\mathbf{N}$)

Si $a \in \mathbf{N} - \{0\}$ y $b \in \mathbf{N}$ entonces existen números naturales q y r, únicos, tales que $0 \leq r < a$ y $b = a \cdot q + r$.

Demostración:

Para probar la existencia de dichos números naturales, distinguiremos dos casos:

a) que $b < a$. En tal situación basta considerar $q = 0$ y $r = b$.
b) que $b \geq a$. En tal situación $A = \{n: (n \in \mathbf{N}) \wedge (b < n \cdot a)\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbf{N}$, por la propiedad de Arquímedes; notemos $p = \text{mín } A$. Puesto que $p > 0$ el elemento $q = p-1$ no pertenecerá al conjunto A, luego $a \cdot q \leq b$; basta entonces, considerar $r = b - a \cdot q$ (obviamente $0 \leq r < a$).

Finalmente, si q, q', r, r' son números naturales verificando $0 \leq r < a \wedge 0 \leq r' < a \wedge b = a \cdot q + r = a \cdot q' + r'$ deducimos que $a\,q + r = a\,q' + r'$. Si $r' \geq r$ (en caso contrario, el razonamiento es similar) entonces $q \geq q'$, ya que $a > 0$, luego deducimos $a(q-q') = r'-r$. Teniendo presente que $0 \leq r' - r < a$, de la proposición anterior concluimos $r'-r = 0$ y $q'-q = 0$; es decir $r' = r$ y $q' = q$; de donde sigue la unicidad de tales números.

□

Definición: Si $a \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces a los números naturales q y r, verificando $0 \leq r < a$ y $b = a.q+r$, unívocamente determinados por la proposición anterior, los denominaremos, respectivamente, cociente y resto de la división euclídea del número natural b por el número natural distinto de cero a. El número b se denomina dividendo y el número a, divisor, de la división euclídea de b por a.

Definición: Diremos que un número natural n es par (respectivamente, impar) sí y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2 \cdot m$ (respectivamente, $n = 2 \cdot m+1$).

De la proposición anterior deducimos que si $x \in \mathbb{N}$, entonces existen $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ tales que $x = 2 \cdot q + r$ y $0 \leq r < 2$. Por tanto, o bien $r = 1$ en cuyo caso x es impar, o bien $r = 0$ en cuyo caso x es par.

Así pues, todo número natural es par o impar y, obviamente, no puede ser par e impar simultáneamente.

□ □

Existencia y unicidad de la función factorial

Proposición 19

Sea A un conjunto no vacío y $a \in A$. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ sea

$f_k \in F(A;A)$ y $m \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}^*$ tales que $m \leq n$. En tal situación, existe una única aplicación $g_n \in F([m,n];A)$ tal que

a) $g_n(m) = a$

b) $(\forall x)(x \in [m,n[\Rightarrow g_n(x^+) = f_{x^+}[g_n(x)])$

Demostración:

Existencia: Fijado $m \in \mathbb{N}^*$ consideremos el conjunto

$S_m = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq m) \wedge (\text{existe } g_n \in F([m,n];A) \text{ verificando: a) } g_n(m) = a \text{ y b) } (\forall x)(x \in [m,n[\Rightarrow g_n(x^+) = f_{x^+}[g_n(x)]))\}$;

todo se reduce a demostrar que $S_m = [m,\rightarrow[$. Puesto que la aplicación $g_m \in F(\{m\};A)$ definida por $g_m(m) = a$ verifica a) y b), deducimos que $m \in S_m$.

Supongamos que $x \in S_m$, veamos que $x^+ \in S_m$. En efecto, definimos $g_{x^+} F([m,x^+];A)$ así:

$$g_{x^+}|_{[m,x]} = g_x \qquad \text{y} \qquad g_{x^+}(x^+) = f_{x^+}[g_x(x)];$$

entonces resulta

a) $g_{x^+}(m) = g_x(m) = a$

b) $\forall r \in [m,x^+[$ $\begin{cases} r \in [m,x[\Rightarrow g_{x^+}(r^+) = g_x(r^+) = f_{r^+}[g_x(r)] = f_{r^+}[g_{x^+}(r)] \\ \text{ó} \\ r = x \Rightarrow g_{x^+}(r^+) = f_{x^+}[g_x(x)] = f_{x^+}[g_{x^+}(x)] \end{cases}$

Luego $x^+ \in S_m$; conclusión: $S_m = [m,\rightarrow[$.

Unicidad: fijado $m \in \mathbb{N}^*$ consideramos el conjunto

$T_m = \{x: (x \in [m,\rightarrow[) \wedge (\text{Si } h \in F([m,x];A) \text{ verifica a) y b) entonces } h = g_x)\}$

Trivialmente $m \in T_m$; veamos, entonces, que si $x \in T_m$ resulta $x^+ \in T_m$.

Si $h \in F([m,x^+];A)$ verifica las condiciones a) y b) obtendremos $h_{|[m,x]} = g_x = g_{x^+}|_{[m,x]}$ y, además, $h(x^+) = f_{x^+}[h(x)] = f_{x^+}[g_x(x)] = g_{x^+}(x^+)$, es decir,

$$h = g_{x^+} \ ,$$

por tanto $x^+ \in T_m$.

Conclusión: $T_m = [m,\rightarrow[$.

□

Proposición 20

Sea A un conjunto no vacío y $a \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ sea $f_n \in F(A;A)$, sea $m \in \mathbb{N}$. En tal situación, existe una única aplicación $\Phi \in F([m,\rightarrow[;A)$ tal que

a) $\Phi(m) = a$

b) $(\forall x)(x \in [m,\rightarrow[\Rightarrow \Phi(x^+) = f_{x^+}[\Phi(x)])$

Demostración:

Existencia: si para cada $n \in [m,\rightarrow[$ consideramos la aplicación $g_n \in F([m,n];A)$ de la proposición anterior y definimos $\Phi \in F([m,\rightarrow[)$, así: $\Phi(n) = g_n(n)$, entonces verificará

a) $\Phi(m) = g_m(m) = a$

b) $(\forall x)(x \in [m,\rightarrow[\Rightarrow \Phi(x^+) = g_{x^+}(x^+) = f_{x^+}[g_{x^+}(x)] = f_{x^+}[g_x(x)] = f_{x^+}[\Phi(x)])$

Unicidad: si $h \in F([m,\rightarrow[;A)$ verifica las condiciones a) y b) y consideramos el conjunto

$$R_m = \{n: (n \in [m,\to[) \wedge (h(n) = \Phi(n))\},$$

resulta que $m \in R_m$; y si $x \in R_m$ entonces $\Phi(x^+) = f_{x^+}[\Phi(x)] = f_{x^+}[h(x)] = h(x^+)$, es decir, $x^+ \in R_m$.

Conclusión: $R_m = [m,\to[$, luego $h = \Phi$.

□

Corolario

Existe una única aplicación $\Phi \in F(\mathbb{N},\mathbb{N})$ tal que

a) $\Phi(0) = 1$

b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi(n^+) = n^+\Phi(n))$

En efecto: si consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida por $\psi_n(m) = n.m$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ y aplicamos la proposición anterior al esquema $A = \mathbb{N}$; $a = 1$; $m = 0$; $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, deducimos la existencia de una única aplicación $\Phi \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ verificando las condiciones:

a) $\Phi(0) = 1$

b) $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi(x^+) = \psi_{x^+}[\Phi(x)] = x^+.\Phi(x))$

□

Definición: La aplicación cuya existencia y unicidad garantiza el corolario anterior, la denominaremos función factorial y notaremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(n) = n!$, que leeremos "factorial del número natural n".

□

§4. CONJUNTOS DE PEANO - HILBERT

A finales del siglo XIX, Peano introduce la primera axiomática del conjunto de los números naturales, culminando el proceso iniciado por B. Pascal en el siglo XVII, de axiomatización de la Aritmética. Hilbert completaría, posteriormente, dicho sistema de axiomas.

El objetivo del presente parágrafo es demostrar que el conjunto de los números naturales definido a partir de la axiomática de Von Neumann - Bernays - Gödel, y cualquier modelo de la axiomática de Peano - Hilbert, son orden isomorfos, respecto de las ordenaciones usuales correspondientes.

Definición: Diremos que un conjunto totalmente ordenado $(A,\leq)$ es de Peano - Hilbert sí y sólo sí verifica las condiciones siguientes:

a) $(\exists\alpha)(\alpha\in A \ \wedge \ \alpha = \text{mín } A)$

b) $(\forall x)(x\in A \Rightarrow (\exists x^*)(x^*\in A \ \wedge \ x < x^* \ \wedge \ (\forall y)(x < y \leq x^* \Rightarrow y = x^*)))$

c) $(\forall B)(B\subset A \ \wedge \ \alpha\in B \ \wedge \ (\forall x)(x\in B \Rightarrow x^*\in B) \Rightarrow B = A)$

Con otras palabras, un conjunto totalmente ordenado es de Peano--Hilbert sí y sólo sí, posee elemento mínimo, cada elemento posee siguiente y verifica un teorema, formalmente análogo al de la inducción completa.

Trivialmente, el conjunto de los números naturales, dotado de estructura de conjunto totalmente ordenado, respecto de la ordenación usual, es un conjunto de Peano - Hilbert.

Proposición 1

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos parcialmente ordenados orden isomorfos y, además, $(A,\leq)$ es un conjunto de Peano - Hilbert, entonces $(B,\leq)$ es un conjunto de Peano - Hilbert.

Demostración:

Si $(A,\leq)$ es un conjunto de Peano - Hilbert orden isomorfo a $(B,\leq)$, entonces deducimos que $(B,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado que posee elemento mínimo; más aún, podemos precisar que si f es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$ y $a = \text{mín } A$, entonces $f(a) = \text{mín } B$.

Veamos que cada elemento de B posee siguiente en $(B,\leq)$; en efecto, si $x \in B$ entonces $f^{-1}(x) \in A$. Notemos $[f^{-1}(x)]'$ el siguiente de $f^{-1}(x)$ en $(A,\leq)$.

Puesto que $f^{-1}(x) < [f^{-1}(x)]'$ deducimos $x < f([f^{-1}(x)]')$. Además, si $y \in B$ verifica $x < y \leq f([f^{-1}(x)]')$, resultará $f^{-1}(x) < f^{-1}(y) \leq [f^{-1}(x)]'$, luego $f^{-1}(y) = [f^{-1}(x)]'$. Es decir, $y = f([f^{-1}(x)]')$, lo que demuestra que $f([f^{-1}(x)]')$ es el elemento siguiente de x en $(B,\leq)$, y notaremos $x^* = f([f^{-1}(x)]')$.

Finalmente, si C es un subconjunto de B tal que $f(a) \in C$ y $(\forall x)(x \in C \Rightarrow x^* \in C)$, entonces $f^{-1}(C)$ es un subconjunto de A que verifica $a \in f^{-1}(C)$, y si $x \in f^{-1}(C)$ resulta $f(x) \in C$, luego $[f(x)]^* \in C$. Ahora bien, teniendo presente que $[f(x)]^* = f(x')$ deducimos $f(x') \in C$; es decir $x' \in f^{-1}(C)$. Conclusión: $f^{-1}(C) = A$ y, por tanto, $C = B$.

□

A continuación, vamos a demostrar que el único conjunto de Peano-Hilbert que existe, salvo orden isomorfismos, es $(\mathbb{N},\leq)$, donde $\leq$ representa la ordenación usual de $\mathbb{N}$.

Teorema 1

Un conjunto parcialmente ordenado $(A,\leq)$ es de Peano - Hilbert sí y sólo sí es orden isomorfo a $(\mathbb{N},\leq)$, siendo $\leq$ la ordenación usual de $\mathbb{N}$.

Demostración:

El recíproco es inmediato, ya que si $(A,\leq)$ es orden isomorfo a $(\mathbb{N},\leq)$, entonces $(A,\leq)$ es de Peano - Hilbert por serlo $(\mathbb{N},\leq)$.

Veamos, pues, el directo; supongamos que $(A,\leq)$ es un conjunto de Peano - Hilbert.

Aplicando el teorema 1 (cap. IV; §3; pág. 189) al esquema $B=A$; $m=0$; $\alpha = \text{mín } A$; $g \in F(A;A)$: $g(x) = x^*(\forall x \in A)$ deducimos la existencia de una única aplicación Φ de $[0,\to[= \mathbb{N}$ en A, verificando

a) $\Phi(0) = \alpha$

b) $(\forall x)(x\in\mathbb{N} \Rightarrow \Phi(x^+) = g[\Phi(x)] = [\Phi(x)]^*)$

pues bien, vamos a demostrar que Φ es un isomorfismo de orden de $(\mathbb{N},\leq)$ en $(A,\leq)$.

Para probar que Φ es un morfismo de orden inyectivo de $(\mathbb{N},\leq)$ en $(A,\leq)$, consideramos el conjunto

$$B = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (\forall y)(y\in\mathbb{N} \wedge y < x \Rightarrow \Phi(y) < \Phi(x))\} \subset \mathbb{N}$$

Obviamente, $0\in B$; veamos que $(\forall x)(x\in B \Rightarrow x^+\in B)$; en efecto, si $x\in B$ e $y\in\mathbb{N}$ entonces se verifica

$$y < x^+ \Rightarrow y \leq \overline{(x^+)} = x \Rightarrow \Phi(y) \leq \Phi(x) < [\Phi(x)]^* = \Phi(x^+)$$

luego $\Phi(y) < \Phi(x^+)$, por tanto $x^+\in B$.

Conclusión: $B = \mathbb{N}$.

Finalmente, probemos la epiyectividad de Φ, observando que $\alpha \in \Phi(\mathbb{N})$ y que si $x\in\Phi(\mathbb{N})$ entonces existe $y\in\mathbb{N}$ verificando $x = \Phi(y)$, de donde resulta $x^* = [\Phi(y)]^* = \Phi(y^+)$, luego $x^*\in\Phi(\mathbb{N})$. Puesto que $(A,\leq)$ es un conjunto de Peano-Hilbert concluimos $\Phi(\mathbb{N}) = A$, lo que completa la demostración del teorema. □ □

PROBLEMAS

1.- Si $n \in \mathbb{N}$ y A es un subconjunto no vacío de n, demostrar la existencia de un elemento $x \in A$ verificando:

$$(\forall y)\,(y \in A - \{x\} \Rightarrow x \in y)$$

Indicación: Pruébese que A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$.

2.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto bien ordenado verificando las condiciones:

a) $A \neq \emptyset$
b) $(A,\leq)$ carece de elemento máximo.
c) Si $x \in A$ es tal que $x \neq$ mín A entonces $S(x)$ posee elemento máximo en $(A,\leq)$.

Demostrar que $(A,\leq)$ es orden isomorfo a $(\mathbb{N},\leq)$.
Indicación: Aplíquese el corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita, a la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N} - \{0\},\leq)$ en A definida por

$$H(\varphi) = \text{mín}\,[A - \varphi(S(n))]$$

siendo $\varphi \in F(S(n);A)$ y $n \in \mathbb{N} - \{0\}$; considerando $\alpha =$ mín A.

3.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto bien ordenado verificando las condiciones:

a) $A \neq \emptyset$
b) $(A,\leq)$ carece de elemento máximo.
c) Si $\alpha =$ mín A entonces para cada $x \in A - \{\alpha\}$ existe un elemento $\bar{x} \in A$ tal que el siguiente de $\bar{x}$ en $(A,\leq)$ es x.

Demostrar que $(A,\leq)$ es orden isomorfo a $(\mathbb{N},\leq)$.
Indicación: Téngase presente que para cada $x \in A - \{\alpha\}$ el elemento $\bar{x} \in A$, cuya existencia garantiza c), es el máximo de $S(x)$ en $(A,\leq)$; y aplíquese el problema anterior.

4.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado verificando las condiciones:

a) $(A,\leq)$ posee elemento mínimo.
b) $(A,\leq)$ carece de elemento máximo.
c) Toda cortadura de $(A,\leq)$ determina salto.

Demostrar que $(A,\leq)$ es orden-isomorfo a $(\mathbb{N},\leq)$.
Indicación: Aplicar el corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita como en el problema 2.

5.- Sea A un conjunto no vacío tal que si $a \in A$ entonces existe una aplicación inyectiva $f \in F(A;A)$ verificando:

a) $a \notin f(A)$
b) $(\forall B)(B \subset A \wedge a \in B \wedge f(B) \subset B \Rightarrow B = A)$

Demostrar la existencia de una única aplicación biyectiva $g \in F(\mathbb{N};A)$ verificando:

a) $g(0) = a$.
b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow g(n+1) = f[g(n)])$

Indicación: Aplíquese el corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita a la función de recurrencia H del tipo $(N - \{0\}, \leq)$ en A definida por

$$H(\varphi) = f[\varphi(\bar{n})]$$

siendo $\varphi \in F(S(n);A)$ y $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, considerando $\alpha = a$; o bien aplicar el teorema 1 del §3. (pág. 189).

6.- Notemos por $\leq$ la ordenación usual de $\mathbb{N}$ y definamos la relación $\leq_1$ en $\mathbb{N}$ así: para cada $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$

$$[x \leq_1 y] \Leftrightarrow [(x \text{ par} \wedge y \text{ impar}) \vee (x \text{ e } y \text{ de la misma paridad} \wedge x \leq y)]$$

a) Demostrar que $(\mathbb{N}, \leq_1)$ es un conjunto bien ordenado que carece de elemento máximo.
b) Demostrar que $(\mathbb{N}, \leq_1)$ no es orden isomorfo a $(\mathbb{N}, \leq)$.

Indicación: b) Demuéstrese que $(\mathbb{N}, \leq_1)$ no es un conjunto de Peano-Hilbert.

7.- Notemos por $\leq$ la ordenación usual de $\mathbb{N}$ y definamos la relación $\leq_1$ en $\mathbb{N}$ así: para cada $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$

$$[x \leq_1 y] \Leftrightarrow [x \text{ par} \wedge y \text{ par} \wedge x \leq y) \vee (x \text{ impar} \wedge y \text{ impar} \wedge x \geq y) \vee \vee (x \text{ par} \wedge y \text{ impar})]$$

a) Demostrar que $(\mathbb{N}, \leq_1)$ es un conjunto totalmente ordenado que posee máximo y mínimo y en el que cada elemento distinto del máximo posee siguiente.
b) Demostrar que $(\mathbb{N}, \leq_1)$ no es un conjunto bien ordenado. ¿Puede ser $(\mathbb{N}, \leq_1)$ un conjunto de Peano-Hilbert?

8.- Encontrar el error en el siguiente razonamiento:

"Sea $A = \{ n: (n \in \mathbb{N} - \{0,1\}) \wedge ((\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \in \mathbb{N} - \{0\} \wedge y \in \mathbb{N} - \{0\} \wedge z \in \mathbb{N} - \{0\} \wedge x^n + y^n = z^n)) \}$ y consideremos $B = \{A\}$, $C = \{\mathbb{N}\}$. La

aplicación $f \in F(B,C)$ definida por $f(A) = \mathbb{N}$ es biyectiva. Si el conjunto A fuera vacío resultaría $f(A) = f(\emptyset) = \emptyset = \mathbb{N}$. Conclusión: $A \neq \emptyset$ ".
Indicación: Recuérdese el concepto de conjunto imagen por una aplicación de un subconjunto del dominio, y que la nomenclatura $f(x) = y$ (para cada elemento x del dominio) es una manera simplificada de escribir $f(\{x\}) = \{y\}$.

9.- Si notamos por A_T y A_B las clases cuyos elementos son las relaciones de orden total y las buenas ordenaciones en $\mathbb{N}$, respectivamente; demostrar que A_B no es parte cofinal de $(A_T, \subset)$.
Indicación: Considérese la ordenación inversa de la usual de $\mathbb{N}$ y pruébese que no existe ningún elemento de A_B que la contenga.

10.- Si f es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en sí mismo, respecto de la ordenación usual, demostrar que el conjunto $f(\mathbb{N})$ no está acotado superiormente en $(\mathbb{N}, \leq)$. Probar, asímismo, que para cada $x \in [f(0), \to[$ existe un único $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) \leq x < f(y+1)$.
Indicación: Dado $x \in [f(0), \to[$ considérese el conjunto $A_x = \{n \in \mathbb{N}: x < f(n)\}$.

11.- Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Demostrar la equivalencia de las proposiciones:

i) Todo subconjunto no vacío de A posee elementos minimales.
ii) No existe una aplicación $f \in F(\mathbb{N}; A)$ verificando

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n+1) < f(n)).$$

Indicación: ii) $\Rightarrow$ i). Si B fuese un subconjunto no vacío de A que carece de elementos minimales, considérese una función de elección φ sobre B y aplicar el teorema de recurrencia transfinita a la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N} - \{0\}, \leq)$ en B definida así: si $n \in \mathbb{N}$ y $g \in F(S(n+1); B)$ entonces $H(g) = \varphi[S_B(g(n))]$, siendo $S_B(x) = \{y \in B: y < x\}$.

12.- Diremos que una clase A es transitiva sí y sólo sí $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \subset A)$. Demostrar que una clase $A \subsetneq \mathbb{N}$ es un número natural sí y sólo sí A es transitiva.
Indicación: En la implicación directa, pruébese por inducción completa que todo número natural es un conjunto transitivo. Si $A \subsetneq \mathbb{N}$ es una clase transitiva entonces, o bien $A = \emptyset \in \mathbb{N}$, o bien $A \neq \emptyset$, en cuyo caso, por ser todo elemento de $\mathbb{N}-A$ cota superior de A, existirá $a = \max A$. Concluyase que $A = a + 1$.

13.- Demostrar que si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tal que $\cup A = A$ entonces $A = \mathbb{N}$.
Indicación: Utilícese el teorema de inducción completa.

14.- Demostrar que no existe una aplicación f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(n+1) \in f(n))$.

15.- Encontrar el error del razonamiento siguiente:
"Notemos por P e I los conjuntos de números naturales pares e impares, respectivamente, y consideremos en $\mathbb{N}$ la ordenación $\leq_1$ caracterizada por las condiciones:

i) cualquier número par es menor o igual que cualquier número impar.
ii) $\leq_1$ induce en P la ordenación usual de P.
iii) $\leq_1$ induce en I la ordenación inversa de la usual de I.

El conjunto P carece de máximo ya que si $x\in P$ entonces $x <_1 <_1 x+2 \in P$. Por otra parte $(\mathbb{N},\leq_1)$ es un conjunto totalmente ordenado e inductivo, luego P será una cadena no vacía acotada superiormente: del teorema del extremo concluimos que P posee elemento máximo".

16.- Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N}\wedge n\subset A \Rightarrow n\in A)$. Demostrar que $A = \mathbb{N}$.
Indicación: Aplíquese el teorema de inducción transfinita observando que $(\forall n)(n\in\mathbb{N} \Rightarrow S(n) = n)$.

17.- Si A es un conjunto entonces notaremos para cada $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

$$A^n = \{(x_1,\ldots,x_n): (\forall k)(k\in\mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq n \Rightarrow x_k \in A)\}$$

Sea

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} A^n$$

g una aplicación de B en A y $\alpha\in A$. Demostrar la existencia de una única aplicación f de $\mathbb{N}$ en A tal que

i) $f(0) = \alpha$.
ii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(n+1) = g(f(0),f(1),\ldots,f(n)))$.

Indicación: Considérese la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}-\{0\},\leq)$ en A definida así: si $n\in\mathbb{N}$ y $\varphi\in F(S(n+1);A)$ entonces $H(\varphi) = g(\varphi(0),\varphi(1),\ldots,\varphi(n))$.

18.- Demostrar que en $\mathbb{N}$ existen ordenaciones totales respecto de la cual $\mathbb{N}$ no verifica la propiedad del supremo.

5

CONJUNTOS FINITOS, INFINITOS Y NUMERABLES

§1: CONJUNTOS FINITOS

Definición: Diremos que dos conjuntos A y B son equipotentes sí y sólo sí existe, al menos, una aplicación biyectiva de A en B.

Trivialmente, en la clase universal la relación de equipotencia (dos conjuntos están relacionados sí y sólo sí son equipotentes) es de equivalencia, como consecuencia de las propiedades que verifican las aplicaciones biyectivas entre conjuntos.

Definición: Diremos que un conjunto A es finito sí y sólo sí existe un número natural n tal que A es equipotente a S(n).

Obviamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto S(n) es finito (en particular, lo es el conjunto vacío).

Proposición 1

Si m y n son números naturales arbitrarios, entonces se verifica

$$[S(m) \text{ equipotente a } S(n)] \Rightarrow [m=n]$$

Demostración: (*)

Consideremos el conjunto

$$A = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m\in\mathbb{N} \Rightarrow (S(m) \text{ equipotente a } S(x) \Rightarrow m=x))\} \subset \mathbb{N}$$

Todo se reduce a demostrar que $A = \mathbb{N}$, es decir, que A verifica las hipótesis del teorema de inducción completa.

Puesto que $S(0) = \emptyset$, resultará que si $S(m)$ es equipotente a $S(0) = \emptyset$, entonces $S(m) = \emptyset$ y, por tanto $0 \in A$.

Veamos que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$; en efecto, sea $x \in A$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $S(x^+)$ es equipotente a $S(m)$, sea f una aplicación biyectiva de $S(x^+)$ en $S(m)$, notemos $a = f(x)$ y observemos que $m > 0$, ya que $x^+ > 0$. En tal situación, consideramos la aplicación g de $S(m)$ en $S(m)$ definida así:

$$g(a) = \bar{m} \quad \wedge \quad g(\bar{m}) = a \quad \wedge \quad g(y) = y, \qquad \text{si} \quad (y \neq a \wedge y \neq \bar{m})$$

Trivialmente, la aplicación g es biyectiva y, por tanto, también lo será la aplicación $h = g \circ f$.

Teniendo presente que $h(x) = \bar{m}$, resultará que la aplicación $\bar{h}$ de $S(x)$ en $S(\bar{m})$ definida por $\bar{h}(y) = h(y)$, para cada $y \in S(x)$, es biyectiva; luego, puesto que $x \in A$, deducimos $x = \bar{m}$, es decir, $x^+ = (\bar{m})^+ = m$, y por tanto $x^+ \in A$. Conclusión: $A = \mathbb{N}$.

□

Corolario 1

Un conjunto A es finito sí y sólo sí existe un único número natural n tal que A es equipotente a $S(n)$.

(*) Otra demostración de esta proposición puede encontrarse en el problema 32 del presente capítulo.

En efecto: es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, ya que si el conjunto A fuese equipotente a $S(m)$ y a $S(n)$ entonces $S(m)$ sería equipotente a $S(n)$ y, por tanto, $m = n$. □

Definición: Al número natural n unívocamente determinado por un conjunto finito A, según el corolario anterior, lo denominaremos número de elementos del conjunto A, y lo notaremos $n(A)$.

Si A es un conjunto finito no vacío que posee n elementos; f es una aplicación biyectiva de $S(n)$ en A y notamos $f(i) = a_i$ $(\forall i \in S(n))$, entonces el conjunto A es, precisamente, el sistema asociado a la familia de elementos de A, definida por f. En tal caso, notaremos frecuentemente $A = \{a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

Corolario 2

Dos números naturales distintos no pueden ser equipotentes.

En efecto: basta observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $n = S(n)$. □

Corolario 3

Todo número natural es un conjunto finito y, además, el número de elementos coincide con el propio número natural.

En efecto: basta recordar que $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = S(n))$. □

Proposición 2

Dos conjuntos finitos son equipotentes sí y sólo sí poseen el mismo número de elementos.

Demostración:

Sean A y B conjuntos finitos que poseen, respectivamente, m y n elementos.

Si A y B son equipotentes, entonces deducimos que S(m) es equipotente a S(n) y, por tanto, m = n.

Recíprocamente, si m = n entonces el conjunto S(m) es equipotente a A y B, luego A y B son equipotentes.

□

Proposición 3

Si A es un conjunto finito y $a \in \mathcal{U}-A$, entonces $A \cup \{a\}$ es un conjunto finito y, además, se verifica $n(A \cup \{a\}) = n(A) + 1$.

Demostración:

Supongamos $n(A) = n$, sea f una aplicación biyectiva de A en S(n) y consideremos la aplicación g de $A \cup \{a\}$ en $S(n) \cup \{n\} = S(n^+)$ definida así:

$$g_{|A} = f \qquad y \qquad g(a) = n.$$

Puesto que, trivialmente, g es biyectiva deducimos que el conjunto $A \cup \{a\}$ es finito y, además, que $n(A \cup \{a\}) = n^+ = n + 1 = n(A) + 1$.

□

Proposición 4

Si A es un conjunto finito no vacío y $a \in A$, entonces $A - \{a\}$ es un conjunto finito y, además, se verifica $n(A - \{a\}) = n(A) - 1$.

Demostración:

Supongamos $n(A) = n > 0$, sea f una aplicación biyectiva de A en $S(n)$ y consideremos la aplicación g de $S(n)$ en $S(n)$ definida así:

$$g(\bar{n}) = f(a) \wedge g(f(a)) = \bar{n} \wedge g(y) = y, \quad \text{si} \quad (y \neq f(a) \wedge y \neq \bar{n})$$

Puesto que la aplicación g es biyectiva, también lo será la aplicación $h = g \circ f$.

Teniendo presente que $h(a) = \bar{n}$, resultará que la aplicación $\bar{h}$ de $A - \{a\}$ en $S(\bar{n})$ definida por $\bar{h}(y) = h(y)$ (para cada $y \in A - \{a\}$) es biyectiva. Por tanto, deducimos que el conjunto $A - \{a\}$ es finito y, además que $n(A - \{a\}) = \bar{n} = n(A) - 1$.

□

Proposición 5

Si n es un número natural y A es un subconjunto de $S(n)$, entonces A es un conjunto finito y, además, se verifica que $n(A) \leq n$.

Demostración:

Todo se reduce a demostrar que el conjunto

$$B = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall A)(A \subset S(n) \Rightarrow A \text{ finito} \wedge n(A) \leq n)\} \subset \mathbb{N}$$

coincide con $\mathbb{N}$, es decir que verifica las hipótesis del teorema de inducción completa.

Trivialmente $0 \in B$; veamos que $(\forall n)(n \in B \Rightarrow n^{+} \in B)$. En efecto, si $n \in B$ y $A \subset S(n+1) = S(n) \cup \{n\}$ distinguiremos dos casos:

a) que $n \in A$. En tal situación $A - \{n\} \subset S(n)$, luego $A - \{n\}$ es finito y, además $n(A - \{n\}) \leq n$; por tanto $A = (A - \{n\}) \cup \{n\}$ es fini-

to y $n(A) = n(A - \{n\}) + 1 \leq n + 1 = n^+$; es decir $n^+ \in B$.

b) que $n \notin A$. Entonces $A \subset S(n)$, luego A es finito y, además, $n(A) \leq n < n^+$; es decir, $n^+ \in B$.

□

Proposición 6

Si A es un conjunto finito, entonces todo subconjunto B de A es finito y, además, $n(B) \leq n(A)$.

Demostración:

Supongamos que A es un conjunto finito, $n(A) = n$ y sea f una aplicación biyectiva de A en $S(n)$. Teniendo presente que la aplicación $g = f_{|B}$ es inyectiva deducimos que la aplicación $\bar{g}$ de B en $g(B)$ definida por $\bar{g}(y) = g(y)$ $(\forall y \in B)$ es biyectiva y, por tanto, B será un conjunto equipotente a $g(B)$, que es finito por la proposición anterior.

Conclusión: B es un conjunto finito y, además,

$$n(B) = n(g(B)) \leq n = n(A).$$

□

Proposición 7

Si A es un conjunto finito y R es una relación de equivalencia en A, entonces A/R es un conjunto finito y, además, se verifica $n(A/R) \leq n(A)$.

Demostración:

Si $A = \emptyset$ entonces la proposición es inmediata; supongamos, pues, $A \neq \emptyset$, sea g una función de elección del conjunto A y, si

$n(A) = n$, sea f una aplicación biyectiva de A en $S(n)$.

La aplicación h de A/R en $S(n)$ definida por $h(\bar{x}) = f[g(\bar{x})]$ $(\forall \bar{x} \in A/R)$ es inyectiva, ya que si $h(\bar{x}) = h(\bar{y})$ entonces $f[g(\bar{x})] = f[g(\bar{y})]$, de donde resulta $g(\bar{x}) = g(\bar{y})$ y, por tanto, $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$. Es decir, $\bar{x} = \bar{y}$.

De la inyectividad de h deducimos que A/R es un conjunto equipotente a $h(A/R)$. Ahora bien, puesto que $h(A/R) \subset S(n)$ concluimos que $h(A/R)$ es finito y, además, $n[h(A/R)] \leq n$; por tanto, el conjunto A/R es finito y, además,

$$n(A/R) = n[h(A/R)] \leq n = n(A).$$

□

Teorema 1

Un conjunto A es finito sí y sólo sí existe un número natural n y una aplicación epiyectiva de $S(n)$ en A.

Demostración:

Si A es finito y $n(A) = n$ entonces existe una aplicación biyectiva (y, por tanto, epiyectiva) de $S(n)$ en A.

Recíprocamente, sea A un conjunto para el cual existe $n \in \mathbb{N}$ y una aplicación epiyectiva f de $S(n)$ en A. En tal situación, si g es una sección de f resulta que g es una aplicación inyectiva de A en $S(n)$; por tanto A es equipotente a $g(A)$ que es un conjunto finito por ser subconjunto de $S(n)$. Conclusión: A es un conjunto finito.

□

Corolario

Si A es un conjunto finito y f es una aplicación de A en un conjunto B, entonces $f(A)$ es un conjunto finito.

En efecto: basta observar que si g es una aplicación biyectiva de $S(n)$ en A, entonces la aplicación $h \in F(S(n);f(A))$ definida por $h(x) = f[g(x)]$ $(\forall x \in S(n))$ es epiyectiva.

□

Proposición 8

Si A es un conjunto finito no vacío y R es una relación de orden total en A, entonces (A,R) posee elemento máximo y elemento mínimo.

Demostración:

Consideremos el conjunto

$$B = \{n: (n \in \mathbb{N} - \{0\}) \wedge (\forall A)(\forall R)(A \text{ conjunto finito} \wedge n(A) = n \wedge \wedge (A,R) \text{ conjunto totalmente ordenado} \Rightarrow (A,R) \text{ posee elemento máximo y elemento mínimo})\} \subset \mathbb{N}$$

y probemos que $B = [1,\rightarrow[$; en efecto, evidentemente, $1 \in B$. Veamos que $(\forall n)(n \in B \Rightarrow n^+ \in B)$.

Supongamos que $n \in B$; sea A un conjunto finito tal que $n(A) = n^+$ (puesto que $n \in B$ resulta $n^+ \geq 2$); sea R una relación de orden total en A; sea $x \in A$ y notemos $C = A - \{x\}$. En tal situación C es un conjunto no vacío tal que $n(C) = n$ y $(C,R_{|C})$ es totalmente ordenado; por tanto, existirán elementos $y \in C$ y $z \in C$ verificando $y = \text{máx } C \wedge z = \text{mín } C$; pues bien, si notamos $y' = \text{máx}\{y,x\}$ y $z' = \text{mín}\{z,x\}$ resulta, trivialmente, que $y' = \text{máx } A$ y $z' = \text{mín } A$; es decir, $n^+ \in B$.

Conclusión: $B = [1,\rightarrow[$. □

Corolario

$\mathbb{N}$ es no finito.

En efecto: supongamos lo contrario, es decir, $\mathbb{N}$ finito. En tal situación $\mathbb{N}$ poseería elemento máximo y elemento mínimo respecto de cualquier ordenación total en $\mathbb{N}$, en particular, respecto de la ordenación usual, lo cual es absurdo ya que $(\mathbb{N}, \leq)$ carece de elemento máximo.

□

Teorema 2 (de Zermelo)

Un conjunto es finito sí y sólo sí posee, al menos, una buena ordenación, tal que su inversa también sea buena ordenación.

Demostración:

Si $A = \emptyset$ entonces $\emptyset$ es una buena ordenación en A tal que $\emptyset^{-1} = \emptyset$ también lo es; supongamos, pues, que A es un conjunto finito no vacío tal que $n(A) = n$; sea f una aplicación biyectiva de $S(n)$ en A; consideremos en $S(n)$ la ordenación inducida por la usual de $\mathbb{N}$ y en A la ordenación transportada de ésta, por f. Teniendo presente que, respecto de dichas ordenaciones, $S(n)$ es bien ordenado, cada subconjunto no vacío de $S(n)$ posee elemento máximo y mínimo y f es un isomorfismo de orden de $S(n)$ en A, concluimos que la ordenación transportada es una buena ordenación en A por la que cada subconjunto no vacío de A poseerá elemento máximo y mínimo y, por tanto, su inversa será, también, buena ordenación en A.

Recíprocamente, sea A un conjunto y $\leq$ una buena ordenación en A tal que su inversa también lo sea; si $A = \emptyset$ entonces A es finito; supongamos $A \neq \emptyset$ y consideremos el conjunto $B = \{x;\ x \in A \wedge \wedge S(x) \text{ es finito}\}$. Entonces, B es un subconjunto no vacío de A ya que si $a = \text{mín } A$ resulta $S(a) = \emptyset$ y, por tanto, $a \in B$. Sea, pues,

$b = \text{máx } B$ y probemos que $A = S(b) \cup \{b\}$; en efecto, supongamos lo contrario, es decir, que $A \neq S(b) \cup \{b\}$. En tal situación, $C = A - (S(b) \cup \{b\})$ sería un subconjunto no vacío de A, luego, si notamos $x = \text{mín } C$ verificará $x > b$ y, además,

$$(\forall y)(y \in S(x) \Rightarrow y \in A \wedge y < x \Rightarrow y \in A \wedge y \notin C \Rightarrow y \in S(b) \cup \{b\})$$
$$(\forall y)(y \in S(b) \cup \{b\} \Rightarrow y \in A \wedge y \leq b \Rightarrow y \in A \wedge y < x \Rightarrow y \in S(x))$$

de donde resulta $S(x) = S(b) \cup \{b\}$ y, por tanto, $S(x)$ es finito. Es decir, $x \in B$ lo cual es una contradicción, ya que $x > b$ y $b = \text{máx } B$. Así pues $A = S(b) \cup \{b\}$, luego A es finito.

□

Teorema 3 (de Tarski)

Un conjunto A es finito sí y sólo sí todo subconjunto no vacío de $P(A)$ posee elementos maximales, por la relación de inclusión.

Demostración:

Sea A un conjunto finito tal que $n(A) = n$, $\mathcal{B}$ un subconjunto no vacío de $P(A)$ y consideremos el conjunto

$$C = \{p: (p \in \mathbb{N}) \wedge (\exists B)(B \in \mathcal{B} \wedge n(B) = p)\} \subset S(n)$$

Puesto que $\mathcal{B} \neq \emptyset$ resulta que C es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ acotado superiormente por n; sea $q = \text{máx } C$ y $B \in \mathcal{B}$ tal que $n(B) = q$. Vamos a probar que el conjunto B es un elemento maximal de $(\mathcal{B}, \subset)$; en efecto, sea $D \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset D$. Puesto que B y D son subconjuntos de A serán finitos y verificarán $n(B) \leq n(D)$, de donde resulta $n(B) = n(D) = q$, ya que $q = \text{máx } C$.

Si existiera un elemento $x \in D - B$, entonces el conjunto $E = B \cup \{x\}$ sería un subconjunto de D tal que $n(E) = n(B \cup \{x\}) = q+1 \leq n(D)$, lo que es una contradicción; por tanto $D = B$, lo que demuestra la maximalidad de B en $(\mathcal{B}, \subset)$.

Recíprocamente, consideremos el conjunto

$$P_F(A) = \{x: x \in P(A) \wedge x \text{ es finito}\} \subset P(A) ;$$

puesto que $\emptyset \in P_F(A)$ resulta $P_F(A) \neq \emptyset$; sea B un elemento maximal de $(P_F(A), \subset)$, veamos que $B=A$. En efecto, si existiera un elemento $x \in A-B$ entonces $C = B \cup \{x\} \in P_F(A)$ y verifica $B \subsetneq C$, lo que contradice la maximalidad de B en $(P_F(A), \subset)$.

Conclusión: $A \in P_F(A)$, es decir A es un conjunto finito.

□

Teorema 3' (de Tarski)

Un conjunto A es finito sí y sólo sí todo subconjunto no vacío de $P(A)$ posee elementos minimales, por la relación de inclusión.

Demostración:

Es análoga a la del teorema anterior, con la única diferencia, en el recíproco, de tomar el conjunto

$$C_F(A) = \{x: x \in P(A) \wedge C_x^A \text{ es finito}\}$$

en lugar de $P_F(A)$.

□

Teorema 4 (de Dedekind)

Un conjunto A es finito sí y sólo sí, existe una aplicación f de A en A tal que, para cada subconjunto B no vacío de A y distinto de A, se verifica $f(B) - B \neq \emptyset$.

Demostración:

Supongamos que A es finito; si $A = \emptyset$ entonces la aplicación $\emptyset$ verifica la condición del enunciado; si $A \neq \emptyset$ y $n(A) = n$, sea g

una aplicación biyectiva de $S(n)$ en A y notemos $a_k = g(k)$, para cada $k \in S(n)$. En tal situación, consideramos la aplicación f de A en A definida así: $f(a_k) = a_{k+1}$ si $0 \leq k < n-1$ y $f(a_{n-1}) = a_o$. Sea B un subconjunto de A tal que $B \neq \emptyset \wedge B \neq A$ y notemos $C = \{k: k \in \mathbf{N} \wedge a_k \notin B\}$; puesto que C es un subconjunto no vacío de $\mathbf{N}$ existirá $p = \text{mín } C$.

Si $p > 0$ entonces $p-1 \in S(n)$ y $a_p \in f(B)-B$. Si, en cambio, $p=0$ y notamos $q = \text{máx}\{k: k \in S(n) \wedge a_k \in B\}$ entonces, o bien $q = n-1$ en cuyo caso $a_o \in f(B)-B$, o bien $q < n-1$ en cuyo caso resulta $a_{q+1} \in f(B)-B$.

Conclusión: $f(B) - B \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que exista una aplicación f de A en A tal que para cada subconjunto B de A, verificando $B \neq \emptyset$ y $B \neq A$, resulte que $f(B)-B \neq \emptyset$. Si $A = \emptyset$ entonces A es finito; si $A \neq \emptyset$ y $x \in A$ notaremos $f^n(x) = f[f^{n-1}(x)]$, para cada $n \in \mathbf{N}-\{0\}$.

Puesto que

$$B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}-\{0\}} \{f^n(x)\}$$

es un subconjunto no vacío de A tal que $B \neq \emptyset$ y $f(B) \subset B$ (ya que

$$f(B) = f\left[\bigcup_{n \in \mathbf{N}-\{0\}} \{f^n(x)\}\right] = \bigcup_{n \in \mathbf{N}-\{0,1\}} \{f^n(x)\} \subset B)$$

deducimos $B=A$.

Sea $p = \text{mín}\{k: k \in \mathbf{N}-\{0\} \wedge f^k(x) = x\}$ y definamos una aplicación φ de $S(p+1)-\{0\}$ en A, de la siguiente manera $\varphi(k) = f^k(x)$ $(\forall k \in S(p+1)-\{0\})$.

Veamos que φ es una aplicación biyectiva; en efecto, sean k, k' tales que $1 \leq k \leq k' \leq p$ y $\varphi(k) = \varphi(k')$, es decir $f^k(x) = f^{k'}(x)$.

En tal situación, o bien $k' = p$ en cuyo caso $f^k(x) = f^p(x) = x$ y, por tanto, $k = p = k'$, o bien $k' < p$ y en tal caso $f^{p-k'}[f^k(x)] = f^{p-k'}[f^{k'}(x)] = f^p(x) = x$, luego teniendo presente que $1 \leq p-k' + k \leq p$, resulta $p-k'+k = p$. Es decir, $k=k'$; de donde deducimos la inyectividad de φ.

Por otra parte, si $y \in A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} \{f^n(x)\}$ y $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ verifica que $y = f^n(x)$, entonces o bien $1 \leq n \leq p$ y en tal caso $y = \varphi(n)$, o bien $n > p$ (supongamos $n = qp+r$ con $q \in \mathbb{N}-\{0\} \wedge 0 \leq r < p$) y en tal caso

$$y = f^n(x) = f^{qp+r}(x) = f^r[f^{qp}(x)] = \begin{cases} x = \varphi(p) & \text{si } r=0 \\ f^r(x) = \varphi(r) & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$$

luego la aplicación φ es epiyectiva.

Conclusión: el conjunto A es equipotente a $S(p+1) - \{0\}$ y, por tanto, finito.

□

Unión y producto de conjuntos finitos

Proposición 9

Si A y B son conjuntos finitos y disjuntos, entonces $A \cup B$ es finito y, además, se verifica $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Demostración:

Supongamos que el conjunto A es finito, y consideremos el conjunto

$$C = \{x: (x \in \mathbb{N}) \wedge (\forall B)(B \text{ conjunto finito} \wedge A \cap B = \emptyset \wedge n(B) = x \Rightarrow \Rightarrow A \cup B \text{ es conjunto finito} \wedge n(A \cup B) = n(A)+n(B))\}$$

Si B es un conjunto finito tal que $n(B) = 0$, entonces $B = \emptyset$, luego $0 \in C$.

Si $n \in C$ y B es un conjunto finito tal que $n(B) = n^+$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces sea $x \in B$ y notemos $D = B - \{x\}$; puesto que D es un conjunto finito disjunto con A, y tal que $n(D) = n(B) - 1$, deducimos que $A \cup D$ es finito y, además, $n(A \cup D) = n(A) + n(D)$. Teniendo presente que $A \cup B = (A \cup D) \cup \{x\}$, concluimos que $A \cup B$ es finito y verifica:

$$n(A \cup B) = n(A \cup D) + 1 = n(A) + n(D) + 1 = n(A) + n(B);$$

es decir, $n+1 \in C$ y, por tanto, $C = \mathbb{N}$.

□

Corolario

Si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ es finito y, además, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

En efecto: teniendo presente las relaciones

$$A = (A-B) \cup (A \cap B) \wedge B = (B-A) \cup (A \cap B) \wedge A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)$$

(en la que todas las reuniones son disjuntas) deducimos que $A \cup B$ es un conjunto finito y verifica:

$$n(A \cup B) = n(A-B) + n(B-A) + n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

□

Proposición 10

Si I es un conjunto finito no vacío y $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos finitos, es decir, A_i es un conjunto finito (para cada $i \in I$), entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto finito.

Demostración:

Consideremos el conjunto

$$C = \{x: (x\in\mathbb{N}-\{0\}) \wedge (\forall I)(I \text{ conjunto finito} \wedge n(I) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall\{A_i\}_{i\in I})(\{A_i\}_{i\in I} \text{ familia de conjuntos finitos} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \text{ es}$$

un conjunto finito))}

y vamos a probar que $C = [1,\rightarrow[$.

En efecto: trivialmente, $1\in C$; supongamos que $n\in C$; sea I un conjunto finito tal que $n(I) = n^+$ y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos finitos. Si $i_o\in I$ y notamos $J = I-\{i_o\}$, entonces J es un conjunto finito no vacío verificando $n(J) = n(I)-1 = n$; luego $\bigcup_{j\in J} A_j$ es un conjunto finito; de donde, teniendo presente que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left[\bigcup_{j\in J} A_j\right] \cup A_{i_o},$$

concluimos que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto finito; por tanto, $n^+\in C$.

Conclusión: $C = [1,\rightarrow[$. □

Proposición 11

Si A y B son conjuntos finitos, entonces $A\times B$ es un conjunto finito y, además, se verifica:

$$n(A\times B) = n(A)\cdot n(B).$$

Demostración:

Sea A un conjunto finito y consideremos el conjunto

$$C = \{x: (x\in\mathbb{N}) \wedge (\forall B)(B \text{ conjunto finito} \wedge n(B) = x \Rightarrow A\times B \text{ es un con-}$$
$$\text{junto finito} \wedge n(A\times B) = n(A)\cdot n(B))\};$$

vamos a probar que $C = \mathbb{N}$.

Puesto que si B es un conjunto finito tal que $n(B) = 0$ entonces $B = \emptyset$ y, por tanto, $A \times B = \emptyset$, resulta $0 \in C$. Supongamos que $n \in C$; sea B un conjunto finito tal que $n(B) = n^+$, sea $b \in B$ y notemos $D = B - \{b\}$. Puesto que D es un conjunto finito verificando $n(D) = n$ resulta que $A \times D$ es finito y, además, $n(A \times D) = n(A) \cdot n(D)$.

Ahora bien, teniendo presente que $A \times B = (A \times D) \cup (A \times \{b\})$ (reunión que, obviamente, es disjunta) y que A es equipotente a $A \times \{b\}$ deducimos, de la proposición 9, que $A \times B$ es un conjunto finito verificando:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(D) + n(A) = (n+1) \cdot n(A),$$

por tanto $n^+ \in C$; es decir, $C = \mathbb{N}$.

□

Proposición 12

Si I es un conjunto finito no vacío y $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos finitos, entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es un conjunto finito.

Demostración:

Consideremos el conjunto

$$C = \{x: (x \in \mathbb{N} - \{0\}) \wedge (\forall I)(I \text{ conjunto finito} \wedge n(I) = x \Rightarrow (\forall \{A_i\}_{i \in I})$$
$$(\{A_i\}_{i \in I} \text{ familia de conjuntos finitos} \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \text{ es un conjunto finito}))\}$$

y vamos a probar que $C = [1, \rightarrow[$.

En efecto: $1 \in C$, ya que si $I = \{i_o\}$ es un conjunto finito con

un sólo elemento y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos finitos, entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es equipotente a A_{i_o}, que es finito. Supongamos que $n \in C$; sea I un conjunto finito tal que $n(I) = n^+$ y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos finitos. Si $i_o \in I$ y notamos $J = I - \{i_o\}$, entonces J es un conjunto finito no vacío verificando $n(J) = n(I) - 1 = n$; luego $\prod_{j\in J} A_j$ es un conjunto finito y, por tanto, por la proposición anterior, también lo será $(\prod_{j\in J} A_j) \times A_{i_o}$, conjunto que es equipotente a $\prod_{i\in I} A_i$ (ya que la aplicación

$$\prod_{i\in I} A_i \longrightarrow (\prod_{j\in J} A_j) \times A_{i_o}$$

$$f \longrightarrow (f_{|J}, f(i_o))$$

es biyectiva). En consecuencia $\prod_{i\in I} A_i$ es un conjunto finito; es decir, $n^+ \in C$.

Conclusión: $C = [1,\to[$. □

Función exponencial de base y exponente natural

Si $p \in \mathbb{N}-\{0\}$ entonces aplicamos el teorema 1 (cap. IV; §3; pág.189) al siguiente esquema:

$B = \mathbb{N}$; $m = 0$; $\alpha = 1$; $g \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$: $g(x) = p\cdot x$ $(\forall x \in \mathbb{N})$

Dicho teorema garantiza la existencia de una única aplicación Φ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ verificando:

a) $\Phi(0) = 1$

b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi(n^+) = g[\Phi(n)] = p\cdot\Phi(n))$

Notaremos $\Phi(n) = p^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, de forma que las anteriores propiedades, se pueden expresar:

$$p^o = 1 \qquad y \qquad (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^{n+1} = p\cdot p^n)$$

Proposición 13

Si $p \in \mathbb{N}-\{0\}$ entonces se verifica:

$$(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^{m+n} = p^m \cdot p^n)$$

Demostración:

Sea $p \in \mathbb{N}-\{0\}$ y consideremos el conjunto

$$A = \{m: (m \in \mathbb{N}) \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^{m+n} = p^m \cdot p^n)\}$$

Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica $p^{0+n} = p^n = p^0 \cdot p^n$ resulta que $0 \in A$; si $m \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$p^{m^+ + n} = p^{m+n^+} = p^m \cdot p^{n^+} = p^m \cdot p \cdot p^n = p^{m+1} \cdot p^n = p^{m^+} \cdot p^n ;$$

por tanto $m^+ \in A$, es decir, $A = \mathbb{N}$.

□

Proposición 14

Si A es un conjunto finito y $n(A) = n$, entonces $P(A)$ es un conjunto finito y $n(P(A)) = 2^n$.

Demostración:

Vamos a probar que el conjunto

$$B = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall A)(A \text{ conjunto finito} \wedge n(A) = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) \text{ es un conjunto finito} \wedge n(P(A)) = 2^n)\} \subset \mathbb{N}$$

coincide con $\mathbb{N}$.

Si A es un conjunto finito que posee 0 elementos, entonces $A = \emptyset$, luego $P(A) = \{\emptyset\}$ es finito y $n(P(A)) = 1 = 2^0$; es decir, $0 \in B$.

Supongamos que $n \in B$, sea A un conjunto finito tal que $n(A) = n^+$, sea $a \in A$ y consideremos los conjuntos

$$C = \{x: x \in P(A) \wedge a \in x\} \; ; \quad D = \{x: x \in P(A) \wedge a \notin x\}; \quad E = A - \{a\}.$$

C y D son conjuntos disjuntos cuya reunión es $P(A)$ y, ambos, equipotentes a $P(E)$, ya que las aplicaciones $f \in F(C,P(E))$ y $g \in F(D;P(E))$ definidas así:

$$f(x) = x - \{a\} \; (\forall x \in C) \quad y \quad g(x) = x \quad (\forall x \in D)$$

son, obviamente, biyectivas. Puesto que E es un conjunto finito que posee n elementos, deducimos que los conjuntos C y D son finitos y poseen, cada uno, 2^n elementos. En consecuencia $P(A) = C \cup D$ es un conjunto finito y, además, $n(P(A)) = n(C) + n(D) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, luego $n^+ \in B$.

Conclusión: $B = \mathbb{N}$.

□

Corolario

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < 2^n)$$

En efecto: basta tener presente que si A es un conjunto finito tal que $n(A) = n$, entonces la aplicación $f \in F(A;P(A))$ definida por

$$f(x) = \{x\} \qquad (\forall x \in A)$$

es inyectiva, no epiyectiva.

□

§2. CONJUNTOS INFINITOS, SEGUN DEDEKIND

Definición: Diremos que un conjunto A es infinito, según Dedekind, sí y sólo sí existe un subconjunto B de A, distinto de A, equipotente a A.

Ejemplo: el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito, según Dedekind, ya que $P = \{x: (\exists n)(n\in\mathbb{N} \wedge x = 2n)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$, distinto de $\mathbb{N}$, equipotente a $\mathbb{N}$ (la aplicación $f \in F(\mathbb{N};P)$ definida por $f(n)=2n$ $(n\in\mathbb{N})$ es biyectiva).

Por otra parte, si $m\in\mathbb{N}$ entonces m no es infinito según Dedekind ya que ($A\subsetneq m \Rightarrow$ A finito $\wedge\ n(A) < n(m) \Rightarrow$ A no es equipotente a m).

Teorema 1

Un conjunto A es no finito sí y sólo sí existe un subconjunto B de A equipotente a $\mathbb{N}$.

Demostración:

Supongamos que A es un conjunto no finito (por tanto no vacío) y consideremos una función de elección g de A. Sea H la función de recurrencia, del tipo $(\mathbb{N}-\{0\},\leq)$ en A, definida así: si $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ y $k \in F(S(n);A)$, entonces $H(k) = g[A - k(S(n))]$.

Del corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (cap. II;§5; pág. 149), tomando $a = 0$ y $\alpha = g(A)\in A$, deducimos la existencia de una única aplicación f de $\mathbb{N}$ en A verificando las condiciones:

a) $f(0) = g(A) = \alpha$

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}-\{0\} \Rightarrow f(n)=H(f_{|S(n)}) = g[A-f(S(n))])$

Veamos que f es inyectiva; en efecto, sean $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $m \neq n$ (supongamos $m < n$, en caso contrario, el razonamiento es similar), entonces resultará

$$f(n) = g[A - f(S(n))] \in A - f(S(n)) \qquad y \qquad f(m) \in f(S(n))$$

luego $f(n) \neq f(m)$.

En consecuencia, $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de A equipotente a $\mathbb{N}$.

Recíprocamente, si B es un subconjunto de A equipotente a $\mathbb{N}$, entonces A es no finito ya que, en caso contrario, B sería finito y, por tanto, también lo sería $\mathbb{N}$.

□

Teorema 2

Un conjunto A no vacío es no finito sí y sólo sí existe, al menos, una ordenación $\leq$ en A respecto de la cual A carece de elementos maximales.

Demostración:

Sea A un conjunto no finito; sea B un subconjunto de A equipotente a $\mathbb{N}$; sea f una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en B y consideremos en B la ordenación transportada por f, de la usual de $\mathbb{N}$. Si notamos por $\leq$ dicha ordenación de B, definimos en A la relación R de la siguiente forma:

$$[(x,y) \in R] \Leftrightarrow [(x=y) \vee (x \in B \wedge y \in B \wedge x \leq y) \vee (x \in A-B \wedge y \in B)]$$

Trivialmente, (A,R) es un conjunto parcialmente ordenado que carece de elementos maximales.

Recíprocamente, sea A un conjunto no vacío y $\leq$ una relación de orden parcial en A, respecto de la cual A carezca de elementos maximales; notemos, para cada $x \in A$, $A_x = \{y: y \in A \wedge x < y\} \subset A$ (obsérvese que $A_x \neq \emptyset \quad (\forall x \in A)$).

Sea h una función de elección del conjunto A y consideremos la función de recurrencia H, del tipo $(\mathbb{N}-\{0\}, \leq)$ en A, definida así: si $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ y $k \in F(S(n); A)$, entonces $H(k) = h(A_{k(n-1)})$.

Del corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (cap. II; §5; pág. 149), tomando $a=0$ y $\alpha = h(A)$, deducimos la existencia de una única aplicación f de $\mathbb{N}$ en A verificando las condiciones:

a) $f(0) = h(A)$

b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N}-\{0\} \Rightarrow f(n) = H(f_{|S(n)}) = h(A_{f(n-1)})$

Veamos que f es un morfismo de orden inyectivo de $(\mathbb{N}, \leq)$ en $(A, \leq)$.

Lema 1: $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) < f(n+1))$

En efecto: consideremos el conjunto

$$C = \{n: n \in \mathbb{N} \wedge f(n) < f(n+1)\}$$

Puesto que $f(1) = h[A_{f(0)}] > f(0)$ resulta $0 \in C$.
Supongamos que $n \in C$. En tal situación $f(n+1) = h[A_{f(n)}] > f(n)$ luego $n+1 \in C$; por tanto, $C = \mathbb{N}$.

Lema 2: $(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge m < n \Rightarrow f(m) < f(n))$

En efecto: consideremos el conjunto

$$C = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m \in \mathbb{N} \wedge m < n \Rightarrow f(m) < f(n))\}$$

Trivialmente, $0 \in C$; si $n \in C$ y m es un número natural tal que $m < n+1$, entonces, o bien $m < n$ en cuyo caso $f(m) < f(n) < f(n+1)$, o bien $m = n$ en cuyo caso $f(m) = f(n) < f(n+1)$; en consecuencia $n+1 \in C$.

Conclusión $C = \mathbb{N}$.

En particular, del lema anterior deducimos que f es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ en A, luego A es un conjunto no finito.

□

Teorema 3

Un conjunto A no vacío es no finito sí y sólo sí existe, al menos, una ordenación $\leq$ en A, respecto de la cual $(A, \leq)$ posea un único elemento maximal y, en cambio, carezca de elemento máximo.

Demostración:

Si A es no finito, B es un subconjunto de A equipotente a $\mathbb{N}$ y f es una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en B, consideremos en este conjunto la ordenación transportada por f de la ordenación R en $\mathbb{N}$, definida en la página 188. Si notamos por $\leq_1$ dicha ordenación en B, definimos en A la relación S de la siguiente forma:

$$[(x,y) \in S] \Leftrightarrow [(x=y) \vee (x \in B \wedge y \in B \wedge x \leq_1 y) \vee (x \in A-B \wedge y \in f(\mathbb{N}-\{0\}))]$$

Trivialmente, (A,S) es un conjunto parcialmente ordenado que posee un único elemento maximal $(f(0))$ y que, en cambio, carece de elemento máximo.

Recíprocamente, supongamos que A es un conjunto no vacío, y $\leq$ es una relación de orden parcial en A, respecto de la cual, A posee un único elemento maximal (que notaremos por a) y, en cambio, carece de elemento máximo. En tal situación, el conjunto

$$B = \{x: (x \in A) \wedge (x \text{ no es comparable con } a)\}$$

es un subconjunto no vacío de A tal que carece de elemento maximal, por la ordenación inducida; por tanto, del teorema anterior deducimos que B es no finito, luego A será un conjunto no finito.

□

Teorema 4

Un conjunto A no vacío es no finito sí y sólo sí existe, al menos, una ordenación $\leq$ en A y un elemento $x \in A$ tales que

$$(\forall y)(y \in A \wedge y \text{ maximal de } (A,\leq) \Rightarrow \neg(x \leq y))$$

Demostración:

Si A es un conjunto no finito, entonces existirá una ordenación $\leq$ en A, respecto de la que A carecerá de elementos maximales, en tal situación para cada $x \in A$ la proposición

$$(\forall y)(y \in A \wedge y \text{ maximal de } (A,\leq) \Rightarrow \neg(x \leq y))$$

es verdadera.

Recíprocamente, sea A un conjunto no vacío, $\leq$ una ordenación en A, respecto de la cual existe un elemento $x \in A$ tal que verifica

$$(\forall y)(y \in A \wedge y \text{ maximal de } (A,\leq) \Rightarrow \neg(x \leq y)).$$

En tal situación, el conjunto

$$B_x = \{z: z \in A \wedge x \leq z\}$$

es un subconjunto no vacío de A que carece de elementos maximales, por la ordenación inducida. Por tanto B_x es no finito, luego también lo será el conjunto A.

□

Teorema 5

Un conjunto A no vacío es finito sí y sólo sí respecto de cualquier ordenación $\leq$ en A, se verifica que toda cadena no vacía de $(A, \leq)$ posee elemento máximo y elemento mínimo.

Demostración:

Supongamos que A es un conjunto finito no vacío; sea $\leq$ una relación de orden parcial en A y B una cadena no vacía de $(A, \leq)$; puesto que, obviamente, B es un conjunto finito no vacío y totalmente ordenado por la ordenación inducida, $(B, \leq)$ poseerá elemento máximo y elemento mínimo.

Recíprocamente, si A fuese un conjunto no finito y B es un subconjunto de A equipotente a $\mathbb{N}$, entonces consideramos en A la ordenación S, siguiendo el proceso del teorema 2. Trivialmente, B es una cadena no vacía de (A,S) que carece de elemento máximo.

□

Teorema 6

A es un conjunto no finito sí y sólo sí A es infinito, según Dedekind.

Demostración:

Supongamos que A es un conjunto no finito; sea B un subconjunto de A equipotente a $\mathbb{N}$; sea f una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en B y definamos una aplicación g de A en A-{f(0)} así:

$$g|_{A-B} = I_{A-B}$$

y, para cada $x \in B$, si n es el número natural tal que $x = f(n)$, entonces $g(x) = f(n^+)$.

Lema 1: $g \in F(A; A-\{f(0)\})$ es una aplicación inyectiva.

En efecto: si $x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y$, entonces pueden verificarse varios casos:

a) $x \in A-B$ e $y \in A-B$; en tal situación,
$g(x) = x \neq y = g(y)$.

b) $x \in A-B$ e $y \in B$; en tal situación,
$g(x) = x \in A-B$ y $g(y) \in B$, luego $g(x) \neq g(y)$.

c) $x \in B$ e $y \in A-B$; razonando como en el caso anterior obtenemos $g(x) \neq g(y)$.

d) $x \in B$ e $y \in B$; en este caso, sean $n_1 \in \mathbb{N}$ y $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x = f(n_1)$ e $y = f(n_2)$, entonces resulta:
$x \neq y \Rightarrow n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1^+) \neq f(n_2^+) \Rightarrow g(x) \neq g(y)$

Lema 2: $g \in F(A;A-\{f(0)\})$ es una aplicación epiyectiva.
En efecto: si $x \in A-\{f(0)\}$, entonces o bien $x \in A-B$, en cuyo caso $x = g(x) \in g(A)$; o bien, $x \in B$ y, en tal caso, si $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ es tal que $x = f(n) = f((\bar{n})^+)$ y notamos $y = f(\bar{n})$, resultará $g(y) = f((\bar{n})^+) = x$. Es decir $x \in g(A)$.

En definitiva, pues, g es una aplicación biyectiva de A en $A-\{f(0)\}$ y, por tanto, $C = A-\{f(0)\}$ es un subconjunto de A, distinto de A, equipotente a A; luego A es un conjunto infinito, según Dedekind.

Recíprocamente, supongamos que A es un conjunto infinito, según Dedekind; sea B un subconjunto de A ($B \neq A$) equipotente a A; sea h una aplicación biyectiva de A en B y definamos $g \in F(A;A)$ por la relación $g(x) = h(x)$ $(\forall x \in A)$. Dado $a \in A-B$, por el teorema de recurrencia transfinita en $\mathbb{N}$ (aplicado en el caso $m=0$) existirá una única aplicación f de $[0,\rightarrow[= \mathbb{N}$ en A verificando:

a) $f(0) = \alpha$

b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n+1) = g(f(n)))$.

Veamos que la aplicación f es inyectiva.

Lema 1: $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) \neq f(n+1))$

En efecto: consideremos el conjunto

$$C = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (f(n) \neq f(n+1))\} \subset \mathbb{N}$$

Puesto que $f(0) = \alpha \in A-B$ y $f(1) = g[f(0)] \in B$ resulta que $0 \in C$. Si $n \in C$, entonces $f(n) \neq f(n+1)$, luego $g(f(n)) \neq$ $\neq g(f(n+1))$, es decir, $f(n+1) \neq f(n+2)$, de donde obtenemos, que $n+1 \in C$. Conclusión $C = \mathbb{N}$.

Lema 2: $(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge m < n \Rightarrow f(m) \neq f(n))$

En efecto: consideremos el conjunto

$$C = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m \in \mathbb{N} \wedge m < n \Rightarrow f(m) \neq f(n))\} \subset \mathbb{N}$$

Trivialmente, $0 \in C$. Supongamos que $n \in C$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n+1$, es decir $m \leq n$.

Si $m=n$ entonces $f(m) = f(n) \neq f(n+1)$; si $0 = m < n$ entonces $f(0) = \alpha \in A-B$ y $f(n+1) = g(f(n)) \in B$, luego $f(0) \neq f(n+1)$. Finalmente, si $0 \neq m < n$ entonces $\bar{m} < m < n$, luego $f(\bar{m}) \neq f(n)$, de donde obtenemos $g(f(\bar{m})) \neq g(f(n))$ y, por tanto, $f(m) \neq f(n+1)$. Es decir, $n+1 \in C$. En consecuencia $C = \mathbb{N}$.

La inyectividad de la aplicación f resulta, inmediatamente, del lema anterior; por tanto, $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de A equipotente a $\mathbb{N}$, luego del teorema 1 concluimos que A es un conjunto no finito, lo que completa la demostración del teorema.

□

Teorema 7

Un conjunto A es finito sí y sólo sí para cada $f \in F(A;A)$ se verifica (f es inyectiva) $\Leftrightarrow$ (f es epiyectiva).

Demostración:

Supongamos que A es un conjunto finito y sea f una aplicación de A en A; si f es inyectiva entonces f(A) es un subconjunto de A equipotente a A; por tanto f(A) = A; es decir, f es epiyectiva.

Si f es epiyectiva y g es una sección de f (es decir, g es una aplicación de A en A tal que $f \circ g = I_A$), entonces teniendo presente que g es inyectiva será también, por lo que acabamos de demostrar, epiyectiva; por tanto, concluimos que g es biyectiva, de donde resulta la biyectividad (en particular, inyectividad) de la aplicación f.

Recíprocamente, si A es un conjunto infinito, según Dedekind, y B es un subconjunto de A ($B \neq A$) equipotente a A, entonces, consideramos una aplicación biyectiva f de B en A, a partir de la cual definimos $g \in F(A;A)$ así:

$$g_{|B} = f \qquad \text{y} \qquad g_{|A-B} = I_{A-B}$$

Trivialmente, g es una aplicación epiyectiva no inyectiva de A en A.

□

§3: CONJUNTOS NUMERABLES

Definición: Diremos que un conjunto A es numerable sí y sólo sí existe una aplicación inyectiva de A en $\mathbf{N}$; o, dicho con otras

palabras, sí y sólo sí A es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{N}$.

De la anterior definición resulta, inmediatamente, las consideraciones siguientes:

a) Todo conjunto finito es numerable.

b) Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es numerable.

c) Si A es un conjunto numerable y B es un conjunto equipotente a A, entonces, B es numerable.

Proposición 1

Todo subconjunto de un conjunto numerable es, asímismo, numerable.

Demostración:

Basta tener presente que si A es un conjunto numerable y f es una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$, entonces para cada subconjunto B de A, la aplicación $g = f|_B \in F(B;\mathbb{N})$ es inyectiva.

□

Teorema 1

Un conjunto $A \neq \emptyset$ es numerable sí y sólo sí existe una aplicación epiyectiva de $\mathbb{N}$ en A.

Demostración:

Si $A \neq \emptyset$ es un conjunto numerable y f es una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$, entonces una retracción de f (que existe por ser inyectiva) será una aplicación epiyectiva de $\mathbb{N}$ en A.

Recíprocamente, si f es una aplicación epiyectiva de $\mathbb{N}$ en A, entonces una sección de f (que existe por ser epiyectiva) será una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$; por tanto, A es un conjunto numerable.

□

Proposición 2

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$, entonces o bien A es finito o bien A es equipotente a $\mathbb{N}$.

Demostración:

Puesto que $\mathbb{N}$ es un conjuntc bien ordenado por la ordenación usual $\leq$, si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ entonces $(A,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento de $(\mathbb{N},\leq)$.

En tal situación, o bien $(A,\leq)$ es orden isomorfo a $(\mathbb{N},\leq)$, en cuyo caso A es equipotente a $\mathbb{N}$; o bien $(A,\leq)$ es orden isomorfo a un segmento B de $(\mathbb{N},\leq)$ tal que $B \neq \mathbb{N}$, en cuyo caso existirá $n \in \mathbb{N}$ verificando $B = S(n)$ y, por tanto, A será equipotente a $S(n)$; es decir, A es finito.

□

Teorema 2

Un conjunto A es numerable sí y sólo sí A es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Demostración:

Si A es un conjunto numerable y f es una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$, entonces f(A) es un subconjunto de $\mathbb{N}$ equipotente a A; por tanto, teniendo presente que f(A) o es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$, deducimos que A o es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

□

El recíproco es trivial.

Proposición 3

Si A es un conjunto numerable y R es una relación de equiva-

lencia en A, entonces A/R es un conjunto numerable.

Demostración:

Si $A = \emptyset$ la proposición es inmediata.

Si $A \neq \emptyset$, sea f una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$ y g una función de elección del conjunto A; definimos una aplicación h de A/R en $\mathbb{N}$ así: $h(\bar{x}) = f[g(\bar{x})]$, para cada $\bar{x} \in A/R$.

Ahora bien, si $\bar{x} \in A/R$ e $\bar{y} \in A/R$ entonces se verifica

$$h(\bar{x}) = h(\bar{y}) \Rightarrow f[g(\bar{x})] = f[g(\bar{y})] \Rightarrow g(\bar{x}) = g(\bar{y}) \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} ,$$

por tanto h es inyectiva, lo que demuestra la numerabilidad del conjunto A/R.

□

Proposición 4

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto infinito y numerable.

Demostración:

Notaremos $\sum_{k=o}^{o} k = 0$; $\sum_{k=o}^{1} k = 1$; y si $n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$ entonces

$$\sum_{k=o}^{n} k = \left(\sum_{k=o}^{n-1} k\right) + n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los conjuntos

$$A_n = \{x: (\exists i)(\exists j)(i \in \mathbb{N} \wedge j \in \mathbb{N} \wedge i+j = n \wedge x = (i,j))\}$$

$$B_n = \{x: (x \in \mathbb{N}) \wedge \left(\sum_{k=o}^{n} k \leq x \leq -1 + \sum_{k=o}^{n+1} k\right)\}$$

Trivialmente, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una partición del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una partición de $\mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las aplicaciones $f_n \in \mathcal{F}(]\leftarrow,n];A_n)$ y $g_n \in \mathcal{F}(B_n;]\leftarrow,n])$ así:

$$f_n(x) = (n-x,x) \quad (\forall x \in]\leftarrow,n]) \qquad y \qquad g_n(x) = x - \sum_{k=o}^{n} k \ ;$$

es inmediato comprobar que f_n y g_n son aplicaciones biyectivas, para cada $n \in \mathbb{N}$.

En tal situación, si notamos $h_n = f_n \circ g_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, de la proposición 12 (cap. I; §5; pág. 78) deducimos la existencia de una única aplicación biyectiva h de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ tal que $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow h_n = h_{|B_n})$; por tanto, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

□

Proposición 5

Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es un conjunto numerable.

Demostración:

Supongamos que A y B son conjuntos numerables; f una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$; g una aplicación inyectiva de B en $\mathbb{N}$ y definamos $h \in \mathcal{F}(A \times B;\ \mathbb{N}\times\mathbb{N})$ así: $h(x,y) = (f(x),g(y))$ (para cada $(x,y) \in A \times B$).

La aplicación h es inyectiva ya que

$$\begin{aligned} h(x,y) = h(x',y') &\Rightarrow (f(x),g(y)) = (f(x'),g(y')) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x)=f(x') \wedge g(y)=g(y') \Rightarrow x=x' \wedge y=y' \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x,y) = (x',y') \ ; \end{aligned}$$

por tanto, si k es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, entonces $k\circ h$ es una aplicación inyectiva de $A \times B$ en $\mathbb{N}$, luego $A \times B$ es numerable.

□

Proposición 6

Si I es un conjunto finito no vacío y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos numerables, entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es un conjunto numerable.

Demostración:

El razonamiento es totalmente análogo al de la proposición 12 (cap. V; §1; pág. 231), permutando el concepto "finito" por el de "numerable".

□

Proposición 7

Si I es un conjunto numerable no vacío y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos numerables, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto numerable.

Demostración:

Sea φ una aplicación inyectiva de I en $\mathbf{N}$ y, para cada $i\in I$, sea φ_i una aplicación inyectiva de A_i en $\mathbf{N}$. Observemos que si $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$, entonces el conjunto $\{i: i\in I \wedge x\in A_i\}$ es no vacío, luego $\varphi(\{i: i\in I \wedge x\in A_i\})$ es un subconjunto de $\mathbf{N}$ no vacío; notaremos por i_x el único elemento de I, tal que $\varphi(i_x) = \text{mín } \varphi(\{i: i\in I \wedge x\in A_i\})$.

Sea f la aplicación de $\bigcup_{i\in I} A_i$ en $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ definida así: $f(x) = (\varphi(i_x), \varphi_{i_x}(x))$; puesto que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \varphi(i_x) = \varphi(i_y) \wedge \varphi_{i_x}(x) = \varphi_{i_y}(y) \Rightarrow i_x = i_y \wedge \varphi_{i_x}(x) = \varphi_{i_y}(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y$$

resulta que f es una aplicación inyectiva de $\bigcup_{i\in I} A_i$ en $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, luego $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto numerable, por serlo $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

□

Teorema 3

Si A es un conjunto infinito, entonces existe una familia de conjuntos infinitos numerables que constituyen una partición del conjunto A.

Demostración:

Consideremos el conjunto

$A = \{(B,\Delta_B): (B\in P(A)-\{\emptyset\}) \wedge (\Delta_B$ es el sistema asociado a una partición de B de conjuntos infinitos numerables)$\}$;

teniendo presente que todo conjunto infinito posee, al menos, un subconjunto infinito numerable, resulta que $A \neq \emptyset$. Definimos, a continuación, en A la relación $\leq$:

$$[(B,\Delta_B) \leq (C,\Delta_C)] \quad \Leftrightarrow \quad [B\subset C \ \wedge \ \Delta_B \subset \Delta_C]$$

Lema: $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo.

En efecto: se comprueba, sin dificultad, que $(A,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $C\neq\emptyset$ una cadena de $(A,\leq)$ y notemos $B = \bigcup_{C\in \mathrm{dom}\ C} C$, $\Delta_B = \bigcup_{C\in \mathrm{dom}\ C} \Delta_C$; veamos que Δ_B es el sistema asociado a una partición de B.

Trivialmente, todo conjunto perteneciente a Δ_B es no vacío; si $x\in\Delta_B \wedge y\in\Delta_B \wedge x\neq y$, sean $C\in \mathrm{dom}\ C$ y $D\in \mathrm{dom}\ C$ tales que $x\in\Delta_C$ e $y\in\Delta_D$. En tal situación, por ser C una cadena de $(A,\leq)$ se verificará $(C,\Delta_C)\leq(D,\Delta_D)$ o $(D,\Delta_D)\leq(C,\Delta_C)$, de donde resulta $[x\in\Delta_D \wedge y\in\Delta_D] \vee [x\in\Delta_C \wedge y\in\Delta_C]$, luego $x\cap y = \emptyset$. Por otra parte, si $x\in B$ entonces existe $C\in \mathrm{dom}\ C$ tal que $x\in C$, de donde resulta que x pertenece a un conjunto del sistema Δ_C y, por tanto, a un conjunto del sistema Δ_B.

Conclusión: $(B,\Delta_B)\in A$.

Finalmente, puesto que de la definición de (B,Δ_B) resulta, inmediatamente, que

$$(\forall(C,\Delta_C))((C,\Delta_C)\in C \Rightarrow (C,\Delta_C)\leq(B,\Delta_B)),$$

concluimos que (B,Δ_B) es una cota superior de C en $(A,\leq)$, lo que completa la demostración del lema.

Del lema de Zorn, deducimos la existencia de un elemento (B^*,Δ_{B^*}) maximal de $(A,\leq)$. Si $B^*=A$ entonces el teorema está demostrado, si $B^*\neq A$ entonces ha de ser finito el conjunto $A-B^*$ ya que, de lo contrario, si C es un subconjunto infinito numerable de $A-B^*$ resultaría que $(B^*\cup C, \Delta_{B^*}\cup\{C\})$ es un elemento de A estrictamente mayor que (B^*,Δ_{B^*}), lo que contradiría la maximalidad de (B^*,Δ_{B^*}) en $(A,\leq)$.

En tal situación, basta considerar $C\in\Delta_{B^*}$ y tener presente que $[\Delta_{B^*}-\{C\}]\cup[\{C\cup(A-B^*)\}]$ es el sistema asociado a una partición de A tal que, todos los conjuntos de la partición son infinitos y numerables.

□

Nota: A partir de este teorema se obtienen sugestivas caracterizaciones de los conjuntos infinitos (ver problemas 18 y 19 del capítulo VIII).

□

PROBLEMAS

1.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado tal que todo subconjunto de A acotado superiormente es finito. Demostrar que $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado.
Indicación: Si B es un subconjunto no vacío de A y $b\in B$ considérese el conjunto

$$C = \{x:\ x\in A \wedge x\leq b\}$$

2.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y notemos para cada $B\subset A$

$$C_B = \{x:\ x\in A \wedge x \text{ es cota superior de } B \text{ en } (A,\leq)\}$$

a) Si A es un conjunto finito y para cada $B\subset A$ el conjunto C_B es una cadena de $(A,\leq)$, demostrar que todo subconjunto no vacío de A acotado superiormente (respectivamente, inferiormente) posee supremo (respectivamente, ínfimo) en $(A,\leq)$. ¿Puede asegurarse la existencia del máximo (respectivamente, mínimo) de tales subconjuntos?.

b) Mediante un contraejemplo, demostrar que el apartado a) es falso, en general, si el conjunto A es no finito.

3.- Diremos que un número natural $x\in\mathbb{N}-\{0\}$ es divisor de $y\in\mathbb{N}$ sí y sólo sí existe $z\in\mathbb{N}$ tal que $y = x\cdot z$, en cuyo caso notaremos, frecuentemente, $z = y/x$. Para cada $y\in\mathbb{N}-\{0\}$ designemos

$$\varphi(y) = n\,[\{x:\ x\in\mathbb{N}-\{0\} \wedge x \text{ es divisor de } y\}]$$

y consideramos la relación R definida en $\mathbb{N}-\{0\}$ así: para cada $x\in\mathbb{N}-\{0\}$, $y\in\mathbb{N}-\{0\}$

$$[(x,y)\in R] \Leftrightarrow [(\varphi(x) < \varphi(y)) \vee (\varphi(x) = \varphi(y) \wedge x\leq y)]$$

donde $\leq$ indica la ordenación usual de $\mathbb{N}-\{0\}$.

a) Demostrar que $(\mathbb{N}-\{0\},R)$ es un conjunto bien ordenado.

b) La aplicación $f\in F(\mathbb{N}-\{0\};\mathbb{N})$ definida por $f(x) = x$ $(\forall x\in\mathbb{N}-\{0\})$ ¿es un morfismo de orden de $(\mathbb{N}-\{0\},R)$ en $(\mathbb{N},\leq)$?
La aplicación $g\in F(\mathbb{N}-\{0\};\mathbb{N})$ definida por $g(x) = \varphi(x)$ $(\forall x\in\mathbb{N}-\{0\})$ ¿es un morfismo de orden de $(\mathbb{N}-\{0\},R)$ en $(\mathbb{N},\leq)$?

4.- Sean A y B conjuntos finitos tales que $n(A)=p$ y $n(B)=q$.

a) Demostrar que $F(A;B)$ es un conjunto finito y se verifica: $n[F(A;B)] = q^p$.

b) Si notamos $J(A;B)$ al conjunto cuyos elementos son las aplicaciones inyectivas de A en B demostrar que

$$J(A;B) = \emptyset \qquad \text{si} \quad p > q$$

$$n[J(A;B)] = \frac{q!}{(q-p)!} \qquad \text{si} \quad p \leq q$$

c) Supongamos $p \leq q$ y consideremos en $J(A;B)$ las relaciones R_1 y R_2 definidas así: para cada $f \in J(A;B)$, $g \in J(A;B)$

$$(f,g) \in R_1 \Leftrightarrow f(A) = g(A)$$

$$(f,g) \in R_2 \Leftrightarrow (\exists h)(h \in F(A;A) \wedge h \text{ biyectiva} \wedge f = g \circ h)$$

α) Probar que R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia en $J(A;B)$ tales que $R_1 = R_2$.

β) Probar que el número de elementos de cualquier clase de equivalencia por R_1 o R_2 es igual a $p!$.

γ) Demostrar que

$$n[J(A;B)/R_1] = \frac{q!}{(q-p)!p!}$$

5.- Sea A un conjunto finito no vacío tal que $n(A) = p$; sea $\{A_k\}_{k \in S(n)}$ una partición de A, para un cierto $n \in \mathbb{N}-\{0\}$; notemos $n(A_k) = \alpha_k \in \mathbb{N}-\{0\}$ y sea $\mathcal{B}(A)$ el conjunto cuyos elementos son las aplicaciones biyectivas de A en A. Definimos en $\mathcal{B}(A)$ la siguiente relación R: para cada $f \in \mathcal{B}(A)$, $g \in \mathcal{B}(A)$

$$(f,g) \in R \Leftrightarrow (\forall k)(k \in S(n) \Rightarrow f(A_k) = g(A_k))$$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia en $\mathcal{B}(A)$.

b) Demostrar que el número de elementos de cualquier clase de equivalencia por R es igual a

$$\alpha_o! \cdot \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1}!$$

c) Demostrar que

$$n[\mathcal{B}(A)/R] = \frac{p!}{\alpha_o! \cdot \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1}!}$$

6.- Sea A un conjunto y consideremos

$P_F(A) = \{B: B \in P(A) \wedge B \text{ es un conjunto finito}\}$

$\mathcal{A} = \{\mathcal{B} \subset P(A): (\emptyset \in \mathcal{B}) \wedge (\forall C)(\forall x)(C \in \mathcal{B} \wedge x \in A \Rightarrow C \cup \{x\} \in \mathcal{B})\}$

Demostrar que $P_F(A)$ es el elemento mínimo de $(\mathcal{A}, \subset)$
Indicación: Si $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$ entonces, para probar que $P_F(A) \subset B$ aplíquese el teorema de inducción completa al conjunto

$$M = \{p \in \mathbb{N}: (\forall D)(D \in P_F(A) \wedge n(D) = p \Rightarrow D \in B)\}.$$

7.- Sea $a \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ y consideremos $f \in F(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ definida por $f(n) = a^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

a) Demostrar que f es estrictamente creciente, respecto de la ordenación usual de $\mathbb{N}$.

b) Demostrar que para cada $x \in \mathbb{N} - \{0\}$ existe un único $y \in \mathbb{N}$ verificando $a^y \leq x < a^{y+1}$.

c) Demostrar que para cada $x \in \mathbb{N} - \{0\}$ existen elementos únicos $y \in \mathbb{N}$ y $z_y \in \mathbb{N}$ verificando

$$(0 < z_y < a) \wedge (z_y a^y \leq x < (z_y + 1)a^y).$$

Indicación: b) Utilizar el problema 10 del capítulo anterior.
c) Asociado al elemento $y \in \mathbb{N}$ del apartado anterior, considérese el conjunto

$$A_y = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (na^y > y)\}.$$

8.- Sea A un conjunto y consideremos

$$P_F(A) = \{B: B \in P(A) \wedge B \text{ es un conjunto finito}\}$$

Demostrar que si A es numerable entonces $P_F(A)$ también lo es.
Indicación: Para cada $k \in \mathbb{N}$ considérese

$$A_k = \{B: B \in P_F(A) \wedge n(B) = k\}$$

y, utilizando el teorema de inducción completa, demuéstrese que $(\forall k)(k \in \mathbb{N} \Rightarrow A_k$ es numerable).

9.- Definimos en $P_F(\mathbb{N})$ la relación R así: para cada $B \in P_F(\mathbb{N})$, $C \in P_F(\mathbb{N})$

$$(B,C) \in R \Leftrightarrow n(B) \leq n(C).$$

a) Demostrar que $(P_F(\mathbb{N}), R)$ es un conjunto preordenado.

b) Si R' es la relación de equivalencia asociada al preorden R (capítulo II; §2; proposición 2) y R'' es la relación de orden parcial considerada en $P_F(\mathbb{N})/R'$, demostrar que

$(P_F(\mathbb{N})/R', R'')$ es orden isomorfo a $(\mathbb{N}, \leq)$.

10.- Dados dos conjuntos A y B demostrar que o bien A es equipotente a un subconjunto de B, o bien B es equipotente a un subconjunto de A.
Indicación: Considérese sendas buenas ordenaciones en A y B, y aplíquese el teorema 4 del capítulo III. Otra demostración: considérese el conjunto

$$\mathcal{A} = \{f: (\exists C)(\exists D)(C \in P(A) \wedge D \in P(B) \wedge f \in F(C;D) \wedge f \text{ es biyectiva})\}$$

y pruébese que $(\mathcal{A}, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo, aplicando posteriormente el lema de Zorn.

11.- Sean $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{U}$, $f \in F(A;B)$, $g \in F(B;A)$; demostrar la existencia de $A_1 \in P(A)$, $A_2 \in P(A)$, $B_1 \in P(B)$ y $B_2 \in P(B)$ verificando, simultáneamente, las condiciones siguientes:

a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$.

b) $A_1 \cup A_2 = A$.

c) $B_1 \cup B_2 = B$.

d) $f(A_1) = B_1$ y $f(A_2) = B_2$.

Indicación: Si, para cada $f \in F(A;B)$ y cada $C \in P(A)$, notamos $f^0(C) = C$ y $f^n(C) = f[f^{n-1}(C)]$ $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0\})$; consideremos

$$D = A - g(B); \quad A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (g \circ f)^n(D); \quad A_2 = A - A_1; \quad B_1 = f(A_1); \quad B_2 = f(A_2).$$

12.- Sean A y B dos conjuntos tales que A es equipotente a un subconjunto de B y B es equipotente a un subconjunto de A. Demostrar que A y B son equipotentes (Teorema de Cantor-Bernstein) (véase pág. 284).
Indicación: Utilícese el problema anterior.

13.- Si G es una gráfica funcional del conjunto A en la clase B y dom G es numerable, demostrar que rec G es un conjunto numerable.
Indicación: Considérese una función de elección del conjunto A.

14.- Sean A y B conjuntos tales que
i) A es numerable
ii) Existe una aplicación epiyectiva de A en B.

Demostrar que el conjunto B es numerable.
Indicación: Utilícese el problema anterior.

15.- a) Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $F(S(n);\mathbb{N})$ es numerable.

b) Si para cada $f \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ notamos

$$A_f = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (f(n) \neq 0)\}$$

y consideramos

$$A = \{f: f \in F(\mathbb{N};\mathbb{N}) \wedge A_f \text{ es un conjunto finito}\},$$

demostrar que A es un conjunto numerable.

c) Demostrar que $F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ es un conjunto no numerable.

Indicación: b) Pruébese que A es equipotente al conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(S(n);\mathbb{N}).$$

c) Si φ fuese una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en $F(\mathbb{N};\mathbb{N})$, y notamos $f_n = \varphi(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, demuéstrese que la aplicación $g \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida por $g(n) = 1+f_n(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ verifica $g \notin \varphi(\mathbb{N})$.

16.- Demostrar que $P(\mathbb{N})$ es un conjunto no numerable.
Indicación: Pruébese que $P(\mathbb{N})$ es un conjunto equipotente a $F(\mathbb{N};\{0,1\})$.

17.- Si A es un conjunto infinito y B es un subconjunto numerable de A tal que $A-B$ es infinito, demostrar que $A-B$ es equipotente al conjunto A.
Indicación: Téngase presente que todo conjunto infinito contiene, al menos, un subconjunto infinito numerable.

18.- Diremos que una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ es de carácter finito sí y sólo sí para cada conjunto A se verifica

$$[(\exists i)(i \in I \wedge A = A_i)] \Leftrightarrow [(\forall B)(B \in P_F(A) \Rightarrow (\exists j)(j \in I \wedge B = A_j))]$$

Si notamos por F al sistema asociado a la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ y $C \neq \emptyset$ es una cadena de $(F,\subset)$; demostrar que

$$\bigcup_{C \in C} C \in F.$$

19.- La condición de Tuckey establece que todo sistema asociado a una familia de conjuntos de carácter finito posee, al menos, un elemento maximal por la relación de inclusión.
Demostrar que la condición de Tuckey es equivalente al lema de Zorn.
Indicación: (Lema de Zorn) ⇒ (Condición de Tuckey): téngase presente el problema anterior.
(Condición de Tuckey) ⇒ (Lema de Zorn): teniendo presente que el lema de Zorn es equivalente a la propiedad de Hausdorff, demostrar que la condición de Tuckey implica dicha propiedad.

20.- Si A y B son conjuntos disjuntos, demostrar que $P(A \cup B)$ es equipotente a $P(A) \times P(B)$.
Indicación: Considérese la aplicación definida por

$$f(C) = (A \cap C,\ B \cap C) \quad (\forall C \in P(A \cup B)).$$

21.- Si A es un conjunto equipotente a su conjunto siguiente $A^+ = A \cup \{A\}$, demostrar que $P(P(A))$ es equipotente al conjunto $P(P(A)) \times P(P(A))$.
Indicación: Pruébese que $P(A^+)$ es equipotente al conjunto

$$[\{0\} \times P(A)] \cup [\{1\} \times P(A)]$$

considerando la aplicación

$$f \in F(P(A^+);\ [\{0\} \times P(A)] \cup [\{1\} \times P(A)])$$

definida por:

$$\begin{cases} f(C) = (0,C) & \text{si } C \in P(A^+) \wedge A \notin C. \\ f(C) = (1,C-\{A\}) & \text{si } C \in P(A^+) \wedge A \in C. \end{cases}$$

Téngase presente el problema anterior.

22.- Sea A un conjunto que posee, al menos, dos elementos y consideremos

$$\xi = \{ R:\ R \text{ es relación de equivalencia en } A \} \quad \text{y}$$
$$\mathcal{B} = \xi - \{A \times A\}.$$

Demostrar que R es maximal de $(\mathcal{B}, \subset)$ sí y sólo sí el conjunto cociente A/R es finito y posee exactamente dos elementos.

23.- Demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es finito sí y sólo sí está acotado superiormente por la ordenación usual de $\mathbb{N}$.

24.- Demostrar que un conjunto finito parcialmente ordenado es bien ordenado sí y sólo sí todo subconjunto no vacío posee, a la vez, elemento máximo y elementos minimales.

25.- Demostrar que un conjunto no vacío A es infinito sí y sólo si para cada subconjunto finito B de A se verifica que A es equipotente a A-B.

26.- Si A es un conjunto finito ¿puede afirmarse que $n(n(A)) = A \Leftrightarrow A \in \mathbb{N}$?

27.- Encontrar el error del razonamiento siguiente:
"Sea A un conjunto finito, sea f una aplicación epiyectiva de A en $\mathbb{N}$ y g una sección de f. Puesto que g es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ en A resultará que $\mathbb{N}$ es equipotente a $g(\mathbb{N}) \subset A$; ahora bien, por ser A finito concluimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto finito".

28.- Demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es inductivo por la ordenación inducida de la usual, sí y sólo sí A es finito.

29.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y filtrante superiormente tal que existe un subconjunto B de A que es infinito numerable y cofinal de $(A,\leq)$. Demostrar la existencia de una aplicación f de $\mathbb{N}-\{0\}$ en A verificando:

i) $(\forall k)(k \in \mathbb{N}-\{0\} \Rightarrow f(k) \leq f(k+1))$.
ii) Para cada $x \in A$ existe $n_o \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}-\{0\} \wedge n \geq n_o \Rightarrow f(n) \geq x)$.

Indicación: Considérese una aplicación biyectiva g de $\mathbb{N}$ en B. Utilizando la cofinalidad de B y que $(A,\leq)$ es filtrante superiormente, constrúyase recurrentemente una aplicación $f \in F(\mathbb{N}-\{0\};A)$ tal que $g(0) \leq f(1) \wedge g(1) \leq f(1) \wedge g(k) \leq f(k)$ $(\forall k \in \mathbb{N}-\{0\})$.

30.- a) Demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es cofinal de $\mathbb{N}$, respecto de la ordenación usual, sí y sólo sí A es infinito.

b) Dar ejemplos de ordenaciones totales y buenas ordenaciones sobre $\mathbb{N}$ respecto de las cuales existen partes cofinales finitas.

31.- Si notamos $A = \{A: A \in P(\mathbb{N}) - \{\mathbb{N}\} \wedge A \text{ es infinito}\}$, demostrar que el conjunto de elementos maximales de $(A, \subset)$ es infinito numerable y que, en cambio, $(A, \subset)$ carece de elementos minimales.

32.- Sean A y B conjuntos equipotentes. Sea $a \in A$ y $b \in B$.
i) Demostrar que existe una aplicación biyectiva f de A en B tal que $f(a) = b$.
ii) Demostrar que $A - \{a\}$ es equipotente a $B - \{b\}$.
iii) Demostrar que si m y n son números naturales tales que que $S(m)$ es equipotente a $S(n)$ entonces $m = n$.
Indicación: iii) Considérese el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N}; \text{ Si } m \in \mathbb{N}$ es tal que $S(m)$ es equipotente a $S(x)$ entonces $m = x\}$, y téngase presente ii) para establecer la relación $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x^+ \in A)$.

6

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ORDINALES Y CARDINALES

§1. CONCEPTO DE ORDINAL. PRIMERAS PROPIEDADES

A finales del siglo XIX Cantor introduce los primeros eslabones de la teoría de ordinales que era, fundamentalmente, una teoría de conjuntos bien ordenados. Sería Zermelo (1915) el primero en obtener una teoría de ordinales independiente de los conjuntos ordenados; teoría que, posteriormente, sería completada por R.M. Robinson y Von Neumann (1937).

Definición: Diremos que una clase A es transitiva sí y sólo sí verifica la condición $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \subset A)$.

Ejemplos.

a) Todo número natural es un conjunto transitivo.

En efecto: consideremos el conjunto

$$A = \{n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall x)(x \in n \Rightarrow x \subset n)\}$$

Trivialmente, $0 \in A$; ahora bien si $n \in A$ y $x \in n^+$, entonces, o bien $x = n \subset n^+$, o bien $x \in n$ y, por tanto $x \subset n \subset n^+$; luego $n^+ \in A$.

Conclusión: $A = \mathbb{N}$.

b) $\mathbf{N}$ es un conjunto transitivo.

En efecto: consideremos el conjunto

$$A = \{n: n \in \mathbf{N} \wedge n \subset \mathbf{N}\}$$

Trivialmente, $0 \in A$; además, si $n \in A$ entonces $n \in \mathbf{N}$ y $n \subset \mathbf{N}$ luego $n^{+} \in A$; por tanto, $A = \mathbf{N}$.

c) $\{1\}$ no es un conjunto transitivo, ya que $1 \in \{1\}$ y, en cambio, 1 no es subconjunto de $\{1\}$.

d) Trivialmente, la clase universal U es transitiva.

Proposición 1

Si A y B son clases transitivas entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ son clases transitivas.

Demostración:

Si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$ y $x \in B$, luego $x \subset A$ y $x \subset B$; es decir, $x \subset A \cap B$.

Si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ ó $x \in B$, luego $x \subset A$ ó $x \subset B$; es decir, $x \subset A \cup B$.

□

Mediante un razonamiento análogo, se demuestra que la intersección y la reunión de una familia de conjuntos transitivos es un conjunto transitivo.

Proposición 2

Si A es una clase transitiva y $x \in A$ entonces $x \nsubseteq A$.

Demostración:

Basta tener presente que todo elemento de una clase transitiva

es un subconjunto de la clase, distinta de la propia clase, ya que, en caso contrario, sería verdadera la relación $A \in A$ para dicha clase A.

□

Definición: Diremos que una clase A es un ordinal sí y sólo sí A es transitiva y, además, verifica

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow x=y \vee x \in y \vee y \in x)$$

Ejemplos.

a) Todo número natural es un ordinal.
En efecto: consideraremos el conjunto

$$A = \{ n: (n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall x)(\forall y)(x \in n \wedge y \in n \Rightarrow x=y \vee x \in y \vee y \in x) \}$$

Trivialmente, $0 \in A$; además si $n \in A \wedge x \in n^+ \wedge y \in n^+ \wedge x \neq y$ entonces, o bien $(x \in n) \wedge (y \in n)$ en cuyo caso $(x \in y) \vee (y \in x)$, o bien $(x \in n) \wedge (y=n)$ en cuyo caso $x \in y$, o bien $(x=n) \wedge (y \in n)$ en cuyo caso $y \in x$; por tanto, $n^+ \in A$.
Conclusión: $A = \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{N}$ es un ordinal.
En efecto: si x e y son números naturales distintos entonces, o bien $x < y$ en cuyo caso $x \subsetneq y$ y, por tanto, $x \in y$, o bien $y < x$ en cuyo caso $y \subsetneq x$ y, por tanto, $y \in x$; luego, puesto que $\mathbb{N}$ es un conjunto transitivo, deducimos que $\mathbb{N}$ es un ordinal.

Trivialmente, la intersección de dos clases ordinales es un ordinal; así como la intersección de una familia de conjuntos ordinales.

Ordenación usual en los ordinales

Definición: Si A es un ordinal, notaremos por $\leq$ la relación (que

denominaremos ordenación usual) en A definida así: si $x \in A$ e $y \in A$, entonces

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (x = y \vee x \in y)$$

Proposición 3

Si A es un ordinal entonces $(A, \leq)$ es una clase bien ordenada.

Demostración:

a) La reflexividad de $\leq$ es inmediata.

b) Si x e y son elementos de A tales que $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x=y$, ya que de lo contrario obtendríamos $(x \in y) \wedge (y \in x)$; luego $\leq$ es antisimétrica.

c) Si B es un subconjunto no vacío de A, entonces por el axioma de regularidad existirá un elemento $x \in B$ tal que $x \cap B = \emptyset$. Ahora bien, puesto que para cada $y \in B$ se verifica $y \notin x$, deducimos que, o bien $y = x$ o bien $x \in y$; por tanto $x = \text{mín } B$.

d) La relación $\leq$ es transitiva, ya que si x, y, z son elementos de A verificando $(x \leq y) \wedge (y \leq z)$, aplicando c) al conjunto $B = \{x,y\} \cup \{z\}$ deducimos $x \leq z$.

e) La relación $\leq$ es conexa, ya que si x e y son elementos de A, entonces aplicando c) al conjunto $B = \{x,y\}$ deducimos $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Obviamente todos los intervalos $]\leftarrow, x[$ son conjuntos. □

Salvo que explícitamente digamos lo contrario, la ordenación usual será la que consideraremos en los ordinales cuando nos refiramos a cualquier cuestión relacionada con un orden en dichas clases.

Obsérvese que si A y B son ordinales tales que $A \subset B$, en-

tonces la ordenación inducida en A por la usual de B es, precisamente, la ordenación usual de A.

Proposición 4

Si A es un ordinal y x es un elemento de A, entonces x es un ordinal.

Demostración:

Si $y \in x$ y $z \in y$ entonces z e y son elementos de A. Por tanto $y < x$ y $z < y$, de donde resulta $z < x$, luego $z \in x$, lo que demuestra la transitividad del conjunto x.

Finalmente, puesto que $x \subset A$, deducimos que si y,z son elementos de x lo son también de A, luego se verificará $(y=z) \vee (y \in z) \vee (z \in y)$; es decir, x es un ordinal.

□

Proposición 5

Si A es un ordinal y B es una clase transitiva, entonces se verifica: $[B \subsetneq A] \Leftrightarrow [B \in A]$

Demostración:

Si A es un ordinal y B es una clase transitiva tal que $B \subsetneq A$, entonces $A-B$ es una clase no vacía, por tanto, existirá un elemento $x \in A-B$ verificando $x \cap (A-B) = \emptyset$. Veamos que $x=B$: en efecto, puesto que $x \in A$ resulta $x \subset A$, luego $x \subset B$.

Por otra parte, si y es un elemento arbitrario de B, entonces será un elemento de A, y teniendo presente que A es un ordinal, obtenemos $(x=y) \vee (x \in y) \vee (y \in x)$.

Ahora bien, la relación $(x=y) \vee (x \in y)$ es falsa ya que, de lo contrario, concluiríamos $x \in B$; por tanto, si $y \in B$ entonces

$y \in x$. Conclusión: $x = B \in A$.

Recíprocamente, si A es un ordinal y B es una clase transitiva tal que $B \in A$, entonces de la proposición 2 deducimos $B \subsetneq A$. □

Corolario 1

Si A y B son ordinales entonces se verifica

$$[B \subsetneq A] \Leftrightarrow [B \in A]$$

Trivial. □

Corolario 2

Si A y B son ordinales entonces se verifica $(A \subset B) \vee (B \subset A)$.

En efecto: teniendo presente que $A \cap B$ es un ordinal, o bien $A \cap B = A$ en cuyo caso $A \subset B$, o bien $A \cap B \subsetneq A$ en cuyo caso, por la proposición anterior resultará $A \cap B \in A$, por tanto $A \cap B \notin B$. En consecuencia $A \cap B = B$, ya que si se verificara $A \cap B \subsetneq B$ resultaría $A \cap B \in B$. □

Del anterior corolario resulta inmediatamente que si A y B son ordinales, entonces $A \cup B$ coincide con A o con B, por tanto también es un ordinal.

Corolario 3

Si A y B son ordinales entonces se verifica

$$(A = B) \vee (A \in B) \vee (B \in A).$$

En efecto: si $A \neq B$ entonces por el corolario anterior deducimos $(A \subsetneq B) \vee (B \subsetneq A)$, luego $(A \in B) \vee (B \in A)$. □

Corolario 4

Si A es una clase transitiva, entonces se verifica

$$[A \text{ es un ordinal}] \Leftrightarrow [(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \text{ es un ordinal})] .$$

En efecto: la implicación directa es consecuencia de la proposición 4; recíprocamente, si A es una clase transitiva tal que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x$ es un ordinal), entonces dos elementos arbitrarios x e y de A son ordinales, luego del corolario anterior deducimos $(x = y) \vee (x \in y) \vee (y \in x)$ y, puesto que A es una clase transitiva, concluimos que A es un ordinal.

□

Teorema 1

Si A es una clase transitiva, entonces se verifica

$$[A \text{ es un ordinal}] \Leftrightarrow [(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \text{ es transitiva})]$$

Demostración:

Si A es un ordinal entonces $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x$ es un ordinal) por tanto $(\forall x)(x \in A \Rightarrow$ es transitiva).

Recíprocamente, supongamos que A es una clase transitiva tal que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x$ es transitiva); si la clase $B = \{x: (x \in A) \wedge (x$ no es un ordinal)$\}$ fuese no vacía, existiría un elemento $x \in B$ verificando $x \cap B = \emptyset$. Ahora bien, puesto que $x \subset A$ resultará $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \in A \wedge y \notin B)$, es decir $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y$ es un ordinal) y teniendo presente que x es un conjunto transitivo, ya que $x \in A$, concluimos que x es un ordinal, luego $x \notin B$: lo que es una contradicción. En consecuencia $B = \emptyset$, lo que completa la demostración del teorema.

□

Proposición 6

La clase $\theta = \{x: x \text{ es un ordinal}\}$ es un ordinal.

Demostración:

Si $x \in \theta$, de la proposición 4 deducimos que $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \in \theta)$ por tanto $x \subset \theta$; es decir, θ es una clase transitiva y, puesto que del corolario 3 resulta

$$(\forall x)(\forall y)(x \in \theta \wedge y \in \theta \Rightarrow x=y \vee x \in y \vee y \in x)$$

concluimos que θ es un ordinal.

□

Corolario 1

La clase θ no es un conjunto.

En efecto: si la clase θ fuese un conjunto, entonces puesto que θ es un ordinal, obtendríamos $\theta \in \theta$.

□

Corolario 2

θ es el único ordinal que no es un conjunto.

En efecto: si x es un ordinal, entonces por ser θ un ordinal obtenemos $(x=\theta) \vee (x \in \theta) \vee (\theta \in x)$, luego, teniendo presente que $\theta \notin x$, deducimos que si $x \neq \theta$ entonces $x \in \theta$. Es decir $x \in U$.

□

Corolario 3

$$(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow x = S(x) = \{y: y \in \theta \wedge y < x\})$$

En efecto: basta observar que si $x \in \theta$ entonces se verifican las relaciones:

$$(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \in \theta \wedge y < x \Rightarrow y \in S(x)^{\circ})$$
$$(\forall y)(y \in S(x) \Rightarrow y \in \theta \wedge y < x \Rightarrow y \in x).$$

□

Corolario 4

Si A y B son ordinales orden isomorfos, entonces A=B.

En efecto: si se verificase $A \neq B$, entonces resultaría $(A \in B) \vee (B \in A)$. En el caso $A \in B$ deduciríamos que $A < B$ y que A coincide con el segmento $S(A)$ en $(\theta, \leq)$; por tanto A coincidiría con el segmento $S(A)$ en $(B, \leq)$, de donde concluiríamos que $(B, \leq)$ sería orden isomorfo a un segmento de extremo un elemento de B, lo que es una contradicción.

Bajo el supuesto $B \in A$, se obtiene una contradicción de manera similar.

□

Teorema 2

Si A es un conjunto transitivo, entonces se verifica

$$[A \in \theta] \Leftrightarrow [(\forall B)(B \subsetneq A \wedge B \text{ transitivo} \Rightarrow B \in A)]$$

Demostración:

La implicación directa es consecuencia inmediata de la proposición 5.

Recíprocamente, supongamos que A es un conjunto transitivo, tal que $(\forall B)(B \subsetneq A \wedge B \text{ transitivo} \Rightarrow B \in A)$.

La clase $C = A \cap \theta$ es un conjunto transitivo estrictamente contenido en θ, luego $C \in \theta$, por tanto $C \notin A$; de donde resulta que C no puede ser un subconjunto de A distinto de A. Conclusión: $C = A$, es decir $A \in \theta$.

□

Teorema 3

Si A es una subclase de θ verificando $(\forall x)(x\in\theta \wedge x\subset A \Rightarrow x\in A)$, entonces $A = \theta$.

Demostración:

Supongamos $\theta - A \neq \emptyset$ y sea $x \in \theta - A$ tal que $x \cap (\theta - A) = \emptyset$; puesto que $x \subset \theta$ resulta $x \subset A$, por tanto $x \in A$: lo que es una contradicción.

□

Proposición 7

$$(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow x^{+} \in \theta)$$

Demostración:

Si x es una clase transitiva e $y \in x^{+}$ entonces, o bien $y = x \subset x^{+}$, o bien $y \in x$ en cuyo caso $y \subset x \subset x^{+}$; luego x^{+} es una clase transitiva.

Por otra parte, si y, z son elementos distintos de x^{+} entonces, o bien $(y \in x) \wedge (z \in x)$ en cuyo caso $(y \in z) \vee (z \in y)$, o bien $(y \in x) \wedge (z = x)$ en cuyo caso $y \in z$, o bien $(y = x) \wedge (z \in x)$ en cuyo caso $z \in y$. Conclusión: x^{+} es un ordinal.

□

Proposición 8

$$\cup\theta = \theta.$$

Demostración:

Si $x \in \cup\theta$ entonces existe $y \in \theta$ tal que $x \in y$, por tanto $x \in \theta$.

Recíprocamente, si $x \in \theta$ entonces $x^{+} \in \theta \wedge x \in x^{+}$, luego $x \in \cup\theta$.

□

Proposición 9

Si A es una subclase de θ, entonces $\cup A$ es un ordinal.

Demostración:

Si A es una subclase de θ y $x \in \cup A$ existirá $y \in A$ tal que $x \in y$ y, teniendo presente que en tal situación $y \subset \cup A \wedge x \subset y$, resultará $x \subset \cup A$. Luego $\cup A$ es una clase transitiva.

Finalmente, puesto que $\cup A \subset \cup \theta = \theta$ deducimos que $\cup A$ es una subclase transitiva de un ordinal, por tanto $\cup A$ es un ordinal.

□

Corolario 1

Si A es una subclase de θ y $x \in A$, entonces $x \leq \cup A$.

En efecto: basta tener presente que si $x \in A$ resulta $x \subset \cup A$.

□

Corolario 2

Si A es una subclase de θ y x es un conjunto ordinal tal que $(\forall y)(y \in A \Rightarrow y \leq x)$, entonces $\cup A \leq x$.

En efecto: en tal situación si $z \in \cup A$ existirá $y \in A$ tal que $z \in y$, luego se verificará $(z < y) \wedge (y \leq x)$ de donde obtenemos $z < x$, es decir $z \in x$.

Conclusión: $\cup A \subset x$, por tanto $\cup A \leq x$.

□

Proposición 10

En $\theta \times \theta$ la relación $\leq$ definida por

$$[(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)] \Leftrightarrow [(x_1 \cup y_1 < x_2 \cup y_2) \vee (x_1 \cup y_1 = x_2 \cup y_2 \wedge x_1 \leq x_2) \vee$$
$$\vee (x_1 \cup y_1 = x_2 \cup y_2 \wedge x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)]$$

es una buena ordenación.

Demostración:

Se comprueba sin dificultad, aunque el proceso es algo laborioso, que $(\theta \times \theta, \leq)$ es una clase parcialmente ordenada.

Sea A una subclase no vacía de $\theta \times \theta$; puesto que $\operatorname{dom} A = \{x: (\exists y)(y \in \theta \wedge (x,y) \in A)\}$ es una subclase no vacía de θ, existirá $a = \text{mín dom } A$. Por otra parte $B = \{x: (a,x) \in A\}$ es una subclase no vacía de θ. En tal situación, si notamos $b = \text{mín } B$ se verificará $(\forall (x,y)((x,y) \in A \Rightarrow a \leq x \wedge b \leq y \Rightarrow (a,b) \leq (x,y))$ luego $(a,b) = \text{mín } A$.

□

Proposición 11

Consideremos en $\theta \times \theta$ la buena ordenación definida en la proposición anterior y sean $(x_1,y_1) \in \theta \times \theta \wedge (x_2,y_2) \in \theta \times \theta$ elementos tales que $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$. En tal situación se verifica $(x_1,y_1) \in [(x_2 \cup y_2)^+] \times [(x_2 \cup y_2)^+]$.

Demostración:

Basta tener presente que si $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ entonces $x_1 \cup y_1 \leq x_2 \cup y_2$ y, por tanto $x_1 \cup y_1 < (x_2 \cup y_2)^+$.

□

Resulta, pues, de la proposición anterior que el segmento inicial de extremo $(x,y) \in \theta \times \theta$, por la ordenación considerada en la proposición 10, es una subclase del conjunto

$$[(x \cup y)^+] \times [(x \cup y)^+].$$

□

§2: NUMERO ORDINAL DE UN CONJUNTO BIEN ORDENADO

En el presente parágrafo pretendemos asociar a cada conjunto bien ordenado un único conjunto ordinal tal que, respecto de la ordenación usual, sea orden isomorfo a dicho conjunto bien ordenado; el tal ordinal, lo denominaremos número ordinal del conjunto bien ordenado.

La paradoja de Burali-Forti (1897) establecía que si la clase θ fuese un conjunto, entonces por ser $(\theta,\leq)$ bien ordenado sería orden isomorfo a su número ordinal. Por tanto $(\theta,\leq)$ sería orden isomorfo a un segmento de $(\theta,\leq)$, distinto de θ, lo que es una contradicción. Dicha paradoja queda soslayada estableciendo que la clase θ no es un conjunto.

Teorema 1

Si $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces existe un único ordinal $\alpha\in\theta$ tal que $(\alpha,\leq)$ es orden isomorfo a $(A,\leq)$.

Demostración:

Consideremos el conjunto

$$B = \{x: (x\in A)\wedge(\exists y_x)(y_x\in\theta\wedge(S(x),\leq) \text{ es orden isomorfo a } (y_x,\leq))\}$$

Obsérvese que si $x\in B$ entonces el ordinal $y_x\in\theta$ tal que $(S(x),\leq)$ es orden isomorfo a $(y_x,\leq)$, es único, lo que es consecuencia del corolario 4 (proposición 6; cap. VI; §1; pág. 267).

Consideremos la gráfica G de B en θ definida así:

$$G = \{(x,y_x): (x\in B)\wedge(y_x\in\theta)\wedge((S(x),\leq) \text{ es orden isomorfo a } (y_x,\leq))\}$$

Lema 1: G es un morfismo de orden inyectivo de $(B,\leq)$ en $(\theta,\leq)$.
En efecto: trivialmente, G es una gráfica funcional tal que

dom G = B.

Si $x_1 \in B$ y $x_2 \in B$ verifican $x_1 < x_2$, entonces $G(x_1) < G(x_2)$ ya que, de lo contrario, si $y_{x_1} = G(x_1) \geq G(x_2) = y_{x_2}$ resultaría que y_{x_2} sería orden isomorfo a un subconjunto de y_{x_1} (el propio y_{x_2}); lo cual implicaría que $S(x_2)$ sería orden isomorfo a un subconjunto de $S(x_1)$: lo que es una contradicción, pues $S(x_1) \subsetneq S(x_2)$.

Lema 2: rec G es un segmento de $(\theta, \leq)$ distinto de θ.

En efecto: sean $x \in \theta$ e $y \in$ rec G tales que $x < y$; veamos que $x \in$ rec G.

Puesto que $y \in$ rec G existirá $z \in B$ de manera que $(S(z), \leq)$ es orden isomorfo a $(y, \leq)$.

Luego, puesto que $y \in \theta$ resultará que $(S(z), \leq)$ es orden isomorfo a $(S(y), \leq)$.

Por otra parte, si notamos por G_1 el isomorfismo de orden de $(S(y), \leq)$ en $(S(z), \leq)$, entonces

$$G_1|_{S(x)}[S(x)] = \{t: (\exists w)(w \in S(x) \wedge (w,t) \in G_1)\}$$

es un segmento de $S(z)$ distinto de $S(z)$, ya que $S(x) \subsetneq S(y)$; por tanto, existirá un elemento $u \in S(z)$ tal que $(S(x), \leq)$ es orden isomorfo a $(S(u), \leq)$. Es decir, $x \in$ rec G.

Finalmente, observemos que por ser G una gráfica funcional y dom G = B un conjunto, deducimos del axioma de sustitución que rec G es un conjunto, por tanto rec $G \neq \theta$.

Así pues, del lema anterior deducimos la existencia de un ordinal $\alpha \in \theta$ tal que rec G = $S(\alpha)$.

Lema 3: B = A.

En efecto: vamos a probar que B verifica la hipótesis del teorema de inducción transfinita; supongamos $x \in A$ y $S(x) \subset B$. Puesto que G es un isomorfismo de orden de $(B, \leq)$ en $(S(\alpha), \leq)$ deducimos que

$$G|_{S(x)} = G \cap (S(x) \times S(\alpha))$$

es un isomorfismo de orden de $(S(x),\leq)$ en un subconjunto de $S(\alpha)$, respecto de la ordenación inducida, que, trivialmente, será un segmento de $(\theta,\leq)$ distinto de θ, por tanto un conjunto ordinal; es decir, $x \in B$.

Del teorema de inducción transfinita concluimos $B=A$.

En consecuencia, de los lemas anteriores, deducimos la existencia de un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(\text{rec } G,\leq) = (S(\alpha),\leq) = (\alpha,\leq)$; lo que demuestra la existencia de un conjunto ordinal $\alpha \in \theta$, tal que $(\alpha,\leq)$ es orden isomorfo a $(A,\leq)$.

La unicidad del tal ordinal $\alpha \in \theta$ es consecuencia del corolario 4 (proposición 6; cap. VI; §1; pág. 267), lo que completa la demostración del teorema.

□

Definición: Si $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces el conjunto ordinal $\alpha \in \theta$, unívocamente determinado por el teorema anterior, lo denominaremos número ordinal del conjunto bien ordenado $(A,\leq)$.

Notaremos por ω el número ordinal de $(\mathbb{N},\leq)$. De la anterior definición se deduce, inmediatamente, que dos conjuntos bien ordenados son orden isomorfos sí y sólo sí poseen el mismo número ordinal.

□ □

§3. INTRODUCCION DE LA SUMA Y PRODUCTO DE NUMEROS ORDINALES

El objetivo fundamental del presente parágrafo es introducir los conceptos de suma y producto de números ordinales basándonos

en el teorema del parágrafo anterior, que permite asociar a cada conjunto bien ordenado su número ordinal. Si bien esta introducción tiene aspectos positivos, principalmente en lo que respecta a una cierta idea intuitiva de dichos conceptos, no cabe olvidar sus inconvenientes, especialmente en lo relativo a la obtención de determinadas propiedades.

Una introducción por recurrencia transfinita, de dichos conceptos, distinta aunque equivalente de la que haremos, puede encontrarse en los problemas 29 y 30 del presente capítulo (para un estudio exhaustivo y relativamente conciso de la aritmética ordinal por recurrencia transfinita, puede consultarse el capítulo 8 del texto "Introduction to Axiomatic Set Theory" de G. Takeuti y W. M. Zaring).

Suma de números ordinales

Sea $\alpha\in\theta$, $\beta\in\theta$ y $(A,\leq)$, $(B,\leq)$ conjuntos bien ordenados de números ordinales α y β, respectivamente. Veamos que podemos suponer, sin que ello implique restricción alguna, que los conjuntos A y B son disjuntos. En efecto, de lo contrario, si a y b son conjuntos distintos bastaría considerar $C = A\times\{a\} \wedge D = B\times\{b\}$ e introducir en C y D las relaciones: $[(x,a) \leq (y,a) \Leftrightarrow x \leq y]$ (en C) y $[(x,b) \leq (y,b) \Leftrightarrow x \leq y]$ (en D); observando que $(C,\leq)$ y $(D,\leq)$ son conjuntos bien ordenados orden isomorfos a $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$, respectivamente. Por tanto $(C,\leq)$ y $(D,\leq)$ serían conjuntos bien ordenados cuyos números ordinales son α y β y, además $C\cap D = \emptyset$. Bajo el supuesto de que A y B sean conjuntos disjuntos, introducimos en $A\cup B$ la relación $\leq$:

$$[x \leq y] \Leftrightarrow [(x\in A \wedge y\in A \wedge x\leq y) \vee (x\in B \wedge y\in B \wedge x \leq y) \vee (x\in A \wedge y\in B)]$$

Se comprueba, sin dificultad, que $\leq$ es una relación de orden parcial en $A\cup B$ (denominada ordenación lexicográfica de $A\cup B$), que dicha ordenación induce sobre los conjuntos A y B las ordenaciones de partida y que cada elemento de A es estrictamente menor que cualquier elemento de B.

Proposición 1

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos bien ordenados tales que $A\cap B = \emptyset$, entonces la ordenación lexicográfica en $A\cup B$ es una buena ordenación.

Demostración:

Supongamos que C es un subconjunto no vacío de $A\cup B$ y distingamos dos casos:

a) que C sea un subconjunto de B. En este caso el elemento mínimo de C en $(B,\leq)$ es, trivialmente, el elemento mínimo de C en $(A\cup B,\leq)$.

b) que C no sea subconjunto de B. En tal situación $C\cap A\neq\emptyset$, luego el elemento mínimo de $C\cap A$ en $(A,\leq)$ será, obviamente, el elemento mínimo de C en $(A\cup B,\leq)$.

□

Proposición 2

Si $(A,\leq)$ y $(A_1,\leq)$ son conjuntos bien ordenados orden isomorfos, así como los conjuntos bien ordenados $(B,\leq)$ y $(B_1,\leq)$ entonces $A\cup B$, con la ordenación lexicográfica, es orden isomorfo a $A_1\cup B_1$, con la ordenación lexicográfica.

Demostración:

Basta tener presente que si f_1 es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(A_1,\leq)$ y f_2 es un isomorfismo de orden de $(B,\leq)$ en $(B_1,\leq)$, entonces la aplicación f de $A\cup B$ en $A_1\cup B_1$ tal que $f_{|A}=f_1$ y $f_{|B}=f_2$, es un isomorfismo de orden de $(A\cup B,\leq)$ en $(A_1\cup B_1,\leq)$.

□

Definición: Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos bien ordenados tales que $A\cap B = \emptyset$ y cuyos números ordinales son α y β, respectivamente, entonces al número ordinal del conjunto bien ordenado $(A\cup B,\leq)$, siendo $\leq$ la ordenación lexicográfica, lo denominaremos número ordinal suma de α y β y lo notaremos por $\alpha+\beta$.

La proposición anterior nos garantiza que la definición de número ordinal suma $\alpha + \beta$ es independiente de los conjuntos bien

ordenados considerados, de números ordinales α y β.

Proposición 3

Para cada número ordinal $\alpha \in \theta$ se verifica $\alpha + 1 = \alpha^+$.

Demostración:

Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado de número ordinal α; sea $a \in \mathcal{U} - A$; sea f un isomorfismo de orden de $(A, \leq)$ en $(\alpha, \leq)$ y definamos la aplicación g de $A \cup \{a\}$ en $\alpha \cup \{\alpha\}$ así: $g|_A = f$ y $g(a) = \alpha$.

Trivialmente, g es un isomorfismo de orden de $(A \cup \{a\}, \leq)$, siendo $\leq$ el orden lexicográfico, en $(\alpha \cup \{\alpha\}, \leq)$, siendo $\leq$ la ordenación usual.

Conclusión: $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha^+$

□

Puede comprobarse, no sin dificultades, que la suma de números ordinales es asociativa; en cambio, vamos a probar que no es conmutativa.

Sea $a \in \mathcal{U} - \mathbb{N}$ y consideremos la aplicación f de $\{a\} \cup \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida así:

$$f(a) = 0 \qquad y \qquad (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = n^+).$$

Puesto que obviamente f es un isomorfismo de orden de $(\{a\} \cup \mathbb{N}, \leq_1)$, siendo $\leq_1$ la ordenación lexicográfica, en $(\mathbb{N}, \leq_2)$, siendo $\leq_2$ la ordenación usual, deducimos $1 + \omega = \omega$.

Por otra parte, considerando en $\mathbb{N} \cup \{a\}$ el orden lexicográfico resultará que $\mathbb{N} = S(a)$, por tanto $\omega + 1 > \omega$; luego $1 + \omega \neq \omega + 1$.

De la anterior observación resulta, asímismo, la no validez de la ley de simplificación a la derecha, en la suma de números or-

nales ya que $2+\omega = 1+(1+\omega) = 1+\omega = \omega$, y en cambio $2 \neq 1$.

Teniendo presente que 0 es el número ordinal del conjunto bien ordenado $(\emptyset,\emptyset)$, para cada número ordinal $\alpha \in \theta$ se verificará la relación:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

Producto de números ordinales

Sean $\alpha \in \theta \wedge \beta \in \theta$ y consideremos dos conjuntos bien ordenados $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ cuyos números ordinales sean, respectivamente, α y β.

En $A \times B$ definimos la siguiente relación $\leq$:

$$[(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2)] \Leftrightarrow [(x_2 < y_2) \vee ((x_2=y_2) \wedge (x_1 \leq y_1))]$$

Proposición 4

Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos bien ordenados, entonces la relación $\leq$ anteriormente definida es una buena ordenación en $A \times B$.

Demostración:

a) La reflexividad de $\leq$ en $A \times B$ es inmediata.

b) Si $[(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2)] \wedge [(y_1,y_2) \leq (x_1,x_2)]$, entonces se verificará

$$[(x_2<y_2) \vee ((x_2=y_2) \wedge (x_1 \leq y_1))] \wedge [(y_2 < x_2) \vee ((y_2=x_2) \wedge (y_1 \leq x_1))]$$

de donde deducimos que $(x_2=y_2) \wedge (x_1 \leq y_1) \wedge (y_1 \leq x_1)$. Por tanto $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$, luego $\leq$ es antisimétrica en $A \times B$.

c) Si $[(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2)] \wedge [(y_1,y_2) \leq (z_1,z_2)]$, entonces se verificará

$$[(x_2 < y_2) \vee ((x_2=y_2) \wedge (x_1 \leq y_1))] \wedge [(y_2 < z_2) \vee ((y_2=z_2) \wedge (y_1 \leq z_1))]$$

y de la propiedad distributiva de las proposiciones lógicamente equivalentes deducimos

$$[(x_2<y_2) \wedge (y_2<z_2)] \vee [(x_2<y_2) \wedge (y_2=z_2) \wedge (y_1 \leq z_1)] \vee$$
$$\vee [(x_2=y_2) \wedge (x_1 \leq y_1) \wedge (y_2<z_2)] \vee [(x_2=y_2) \wedge (x_1 \leq y_1) \wedge (y_2=z_2) \wedge$$
$$\wedge (y_1 \leq z_1)].$$

Es decir, $[x_2<z_2] \vee [(x_2<z_2) \wedge (y_1 \leq z_1)] \vee [(x_2<z_2) \wedge (x_1 \leq y_1)] \vee$ $\vee [(x_2=z_2) \wedge (x_1 \leq z_1)]$ de donde resulta $(x_1,x_2) \leq (z_1,z_2)$ luego $\leq$ es transitiva en $A \times B$.

d) Finalmente, si C es un subconjunto no vacío de $A \times B$ entonces rec $C = \{ x: (\exists y)(y \in A \wedge (y,x) \in C)\}$ es un subconjunto no vacío de B; notemos c_o = min rec G. Puesto que $D = \{ x: (x,c_o) \in C \}$ es un subconjunto no vacío de A existirá d_o = min D.
Veamos que (d_o,c_o) = mín C. En efecto, si $(x,y) \in C$ entonces $y \in$ rec C, luego $y \geq c_o$.
Si $y > c_o$ resultaría $(x,y) \geq (d_o,c_o)$; si $y=c_o$ entonces $x \in D$ luego $x \geq d_o$ y, por tanto $(x,y) \geq (d_o,c_o)$.
Conclusión: (d_o,c_o) = mín C.

□

La ordenación $\leq$ anteriormente considerada en $A \times B$, la denominaremos ordenación producto.

Proposición 5

Si $(A,\leq)$ y $(A_1,\leq)$ son conjuntos bien ordenados orden isomorfos, así como los conjuntos bien ordenados $(B,\leq)$ y $(B_1,\leq)$, entonces $(A \times B,\leq)$ es orden isomorfo a $(A_1 \times B_1, \leq)$, con las correspondientes ordenaciones producto.

Demostración:

Basta tener presente que si f_1 es un isomorfismo de orden

de $(A,\leq)$ en $(A_1,\leq)$ y f_2 es un isomorfismo de orden de $(B,\leq)$ en $(B_1,\leq)$, entonces la aplicación f de $A\times B$ en $A_1\times B_1$ definida por $f(x,y) = (f_1(x),f_2(y))$, para cada $(x,y)\in A\times B$, es un isomorfismo de orden de $(A\times B,\leq)$ en $(A_1\times B_1,\leq)$.

□

Definición: Si $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ son conjuntos bien ordenados cuyos números ordinales son α y β, respectivamente, entonces el número ordinal del conjunto bien ordenado $(A\times B,\leq)$, siendo $\leq$ la ordenación producto, recibe el nombre de número ordinal producto de α y β y lo notaremos por $\alpha\cdot\beta$.

La proposición anterior nos garantiza que la definición de número ordinal producto $\alpha\cdot\beta$ es independiente de los conjuntos bien ordenados considerados, de números ordinales α y β.

Proposición 6

Para cada número ordinal $\alpha\in\theta$ se verifica

$$\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0 \quad y \quad \alpha\cdot 1 = 1\cdot\alpha = \alpha$$

Demostración:

Teniendo presente que $A\times\emptyset = \emptyset\times A = \emptyset$ resulta, inmediatamente que $\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$.

Por otra parte, si $\alpha\in\theta$ y $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado de número ordinal α, consideramos $a\in U$ y la aplicación f de A en $A\times\{a\}$ definida por $f(x) = (x,a)$ (para cada $x\in A$). En tal situación f es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(A\times\{a\},\leq)$; luego $\alpha = \alpha\cdot 1$. Análogamente, la aplicación g de A en $\{a\}\times A$, definida por $g(x) = (a,x)$ (para cada $x\in A$) es un isomorfismo de orden de $(A,\leq)$ en $(\{a\}\times A,\leq)$; es decir, $\alpha = 1\cdot\alpha$.

□

Puede comprobarse, no sin dificultades, que el producto de números ordinales es asociativo y distributivo respecto de la suma; vamos, en cambio, a probar que no es conmutativo.

En efecto: puesto que la aplicación f de $\{0,1\}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida por $f(0,n) = 2n$ y $f(1,n) = 2n+1$, es un isomorfismo de orden de $(\{0,1\}\times\mathbb{N},\leq)$ en $(\mathbb{N},\leq)$, deducimos $2\cdot\omega = \omega$.

Por otra parte, teniendo presente que la aplicación g de $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ en $(\mathbb{N}\times\{0\})\cup\mathbb{N}$ definida por $g(n,0) = (n,0)$ y $g(n,1) = n$, es un isomorfismo de orden de $(\mathbb{N}\times\{0,1\},\leq)$, con la ordenación producto, en $((\mathbb{N}\times\{0\})\cup\mathbb{N},\leq)$, con la ordenación lexicográfica, deducimos $\omega\cdot 2 = \omega+\omega$.

Ahora bien, en $(\mathbb{N}\cup(\mathbb{N}\times\{0\}),\leq)$ con el orden lexicográfico se verifica que $\mathbb{N} = S((0,0))$, con lo cual $\omega < \omega+\omega$. Por tanto $2\cdot\omega = \omega < \omega+\omega = \omega\cdot 2$.

□ □

§4. CARDINAL DE UN CONJUNTO

El concepto de cardinal (o número cardinal) de un conjunto A es introducido por Frege (1884) y Russell (1903), independientemente, como la clase cuyos elementos son los conjuntos equipotentes a A, clase que posee el inconveniente de no ser, en general un conjunto; por lo cual, carecerá de sentido considerar la clase cuyos elementos son todos los números cardinales.

El desarrollo de una teoría basada en dicho concepto ofrece bastantes dificultades de tipo operativo y formal. Introduciremos los números cardinales basándonos en el axioma de la elección, a fin de poder asociar a cada conjunto un cardinal.

Si A es un conjunto, notaremos por O_A a la clase cuyos elementos son los ordinales $\alpha\in\theta$ tales que existe una buena ordenación $\leq_1$ en A verificando: $(A,\leq_1)$ es orden-isomorfo a $(\alpha,\leq)$, siendo $\leq$ la ordenación usual de α.

Obsérvese que del axioma de la elección, equivalente al axioma de Zermelo, deducimos que, para cada conjunto A, la clase O_A es una subclase no vacía de θ y, por tanto, existirá el elemento mínimo de O_A en $(\theta,\leq)$.

Definición: Si A es un conjunto entonces el elemento mínimo de O_A en $(\theta,\leq)$, lo denominaremos el cardinal o número cardinal del conjunto A y lo notaremos por Card A.

Así pues, todo número cardinal es un número ordinal; a continuación estableceremos una condición necesaria y suficiente para que un número ordinal sea un número cardinal.

Teorema 1

Un número ordinal $\alpha\in\theta$ es un número cardinal sí y sólo sí para cada $\beta\in\theta$ tal que $\beta<\alpha$, se verifica que β no es equipotente a α.

Demostración:

Supongamos que α sea un número cardinal y A un conjunto tal que Card $A = \alpha$. En tal situación, si $\beta\in\theta$ es un número ordinal equipotente a α resultará $\beta\in O_A$, por tanto $\beta\geq\alpha$.

Recíprocamente, si $\alpha\in\theta$ es tal que para cada $x\in\theta$, $x<\alpha$ se verifica que x no es equipotente a α, deducimos que $\alpha = \text{mín } O_\alpha$. Es decir $\alpha = \text{Card } \alpha$, por tanto, α es un número cardinal.

□

Teorema 2

Dos conjuntos A y B son equipotentes sí y sólo sí poseen el mismo número cardinal.

Demostración:

Supongamos que A y B son conjuntos equipotentes, sea f una aplicación biyectiva de A en B, sea α = Card A, sea $\leq_1$ una buena ordenación en A tal que $(A,\leq_1)$ es orden isomorfo a $(\alpha,\leq)$. En tal situación, si notamos por $\leq_2$ la ordenación transportada a B por f resultará que $(B,\leq_2)$ es orden isomorfo a $(\alpha,\leq)$, luego $\alpha \in O_B$ y, por tanto, Card B $\leq$ Card A. Permutando los conjuntos A y B, mediante un razonamiento análogo obtenèmos Card A $\leq$ Card B; en definitiva Card A = Card B.

Recíprocamente, si A y B son conjuntos tales que Card A = = Card B, $\leq_1$ es una buena ordenación en A tal que $(A,\leq_1)$ es orden isomorfo a (Card A,$\leq$) y $\leq_2$ es una buena ordenación en B tal que $(B,\leq_2)$ es orden isomorfo a (Card B,$\leq$), deducimos que $(A,\leq_1)$ es orden isomorfo a $(B,\leq_2)$ por tanto, A y B son conjuntos equipotentes.

□

Proposición 1

Para cada conjunto A se verifica Card(Card A) = Card A.

Demostración:

Puesto que Card $A \in O_A$ existirá una buena ordenación $\leq$ en A tal que $(A,\leq)$ es orden isomorfo a (Card A,$\leq$), luego Card A es un conjunto equipotente a A, por tanto Card(Card A) = Card A.

□

Proposición 2

Si A es un conjunto equipotente a un número ordinal $\alpha \in \mathfrak{d}$, entonces Card $A \leq \alpha$.

Demostración:

Basta tener presente que si A es un conjunto equipotente a un número ordinal α y f es una aplicación biyectiva de α en A, entonces $(\alpha, \leq)$ es orden isomorfo a $(A, \leq_1)$, siendo $\leq_1$ la ordenación transportada a A por f.

□

Corolario 1

Para cada número ordinal α se verifica Card $\alpha \leq \alpha$.

Trivial.

□

Corolario 2

Si A es un conjunto y α es un número ordinal tal que $A \subset \alpha$, entonces se verifica Card $A \leq \alpha$.

En efecto: basta tener presente que la ordenación inducida en A por la usual de α, dota a A de estructura de conjunto bien ordenado, cuyo número ordinal será menor o igual que α.

□

Corolario 3

Si B es un conjunto y A es un subconjunto de B, entonces se verifica Card $A \leq$ Card B.

En efecto: si f es una aplicación biyectiva de B en Card B, entonces Card $f(A) \leq$ Card B; luego, teniendo presente que A es equipotente a $f(A)$, deducimos Card A = Card $f(A) \leq$ Card B.

□

Corolario 4 (Teorema de Cantor-Bernstein)

Sean A y B conjuntos tales que, A_1 es un subconjunto de A equipotente a B y B_1 es un subconjunto de B equipotente a A. En tal situación, los conjuntos A y B son equipotentes.

En efecto: basta tener presente que se verifica la relación: Card B = Card $A_1 \leq$ Card A = Card $B_1 \leq$ Card B.

□

Corolario 5

Si α y β son números ordinales, entonces se verifica:

$$[\text{Card } \alpha < \text{Card } \beta] \Leftrightarrow [\alpha < \text{Card } \beta].$$

En efecto: si α y β son números ordinales tales que Card $\alpha <$ Card β, entonces si se verificara Card $\beta \leq \alpha$ resultaría Card β = Card(Card β) $\leq$ Card α.

Recíprocamente, si α y β son números ordinales tales que $\alpha <$ Card β, entonces obtenemos Card $\alpha \leq \alpha <$ Card β.

□ □

§5: LA CLASE Ω DE LOS NUMEROS CARDINALES

Teniendo presente que los números cardinales son números ordinales y, por tanto, conjuntos, podremos considerar la clase, que notaremos por Ω, cuyos elementos son todos los números cardinales. En este parágrafo estudiaremos algunas propiedades interesantes de dicha clase y concluiremos estableciendo, como consecuencia del teorema de Cantor, que Ω es una clase propia.

Notaremos $\Omega = \{x: (\exists y)(y \in U \wedge x = \text{Card } y)\}$

Proposición 1

$$\Omega = \{x: x=\text{Card } x\}$$

Demostración:

Si $x \in \Omega$ e $y \in U$ verifican $x = \text{Card } y$ deducimos $x = \text{Card } y = \text{Card (Card } y) = \text{Card } x$.

Recíprocamente, si $x = \text{Card } x$ entonces $x \in U$, luego $x \in \Omega$.

□

A continuación, vamos a demostrar que todo número natural es un número cardinal, a partir de lo cual obtendremos una caracterización de conjuntos finitos, en términos de números cardinales.

Proposición 2

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = \text{Card } n)$$

Demostración:

Si n es un número natural, entonces n es un número ordinal, de donde resulta $\text{Card } n \leq n$. Luego, $\text{Card } n = n \in \mathbb{N}$, o bien $\text{Card } n < n$ en cuyo caso $\text{Card } n \in n \subset \mathbb{N}$; en definitiva, $\text{Card } n$ es un número natural equipotente a n, luego $n = \text{Card } n$.

□

Corolario

$$\mathbb{N} \subset \Omega \subset \theta$$

Trivial.

□

Proposición 3

Un conjunto A es finito y posee n elementos sí y sólo sí $\text{Card } A = n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Si A es un conjunto finito que posee n elementos, entonces A será equipotente a S(n) = n; por tanto Card A = Card n = n.

Recíprocamente, si A es un conjunto cuyo cardinal es un número natural n, entonces resultará Card A = n = Card n; por tanto, A es equipotente a n = S(n). Es decir, A es un conjunto finito que posee n elementos.

□

Así pues, los números naturales son, precisamente, los cardinales de los conjuntos finitos; más aún, en estos conjuntos, el concepto de cardinal coincide con el de número de elementos.

A los números naturales se les suele denominar, también, cardinales finitos y a los elementos de $\Omega - \mathbf{N}$, cardinales infinitos o transfinitos.

Proposición 4

$$\Omega - \mathbf{N} = \{\alpha: \alpha \in \Omega \wedge \text{Card } \alpha = \text{Card } \alpha^+\}$$

Demostración:

Si $\alpha \in \Omega - \mathbf{N}$ entonces trivialmente Card $\alpha \leq$ Card α^+. Por otra parte, α es un conjunto no finito, por tanto, existirá un subconjunto A de α $(A \neq \alpha)$ equipotente a α; sea f una aplicación biyectiva de α en A; sea $x \in \alpha - A$ y consideremos la aplicación g de α^+ en α definida así: $g|_\alpha = f$ y $g(\alpha) = x$. Puesto que, obviamente, g es inyectiva deducimos Card $\alpha^+ \leq$ Card α, luego Card α = Card α^+.

Recíprocamente, si $\alpha \in \mathbf{N}$ entonces se verifica

$$\text{Card } \alpha = \alpha < \alpha^+ = \text{Card } \alpha^+.$$

□

Teorema 1

$$\Omega - \mathbb{N} = \{\alpha: \alpha\in\Omega - \{0,1\} \wedge \mathrm{Card}(\alpha\times\alpha) = \mathrm{Card}\ \alpha\}$$

Demostración:

En primer lugar, observemos que 0 y 1 son los únicos números naturales n para los cuales es válida la relación $\mathrm{Card}(n\times n) = \mathrm{Card}\ n$.

Supongamos que la clase

$$A = \{\alpha: \alpha\in\Omega - \mathbb{N} \wedge \mathrm{Card}(\alpha\times\alpha) \neq \mathrm{Card}\ \alpha\} \subset \theta$$

fuese no vacía: vamos a llegar a una contradicción.

En tales circunstancias, consideremos $\beta = \text{mín } A$ (en $(\theta,\leq)$); del corolario de la proposición 7 (cap. II; §4; pág. 139) deducimos la existencia de una única gráfica G de $\beta\times\beta$ en θ verificando:

i) G es un morfismo de orden de $(\beta\times\beta,\leq_1)$ en $(\theta,\leq)$, siendo $\leq_1$ la ordenación inducida en $\beta\times\beta$ por la buena ordenación de $\theta\times\theta$ considerada en la proposición 10 (cap. VI; §1; pág. 269) y $\leq$ es la ordenación usual de θ.

ii) $\mathrm{dom}\ G = \beta\times\beta$.

iii) rec G es un segmento de $(\theta,\leq)$.

Probaremos que $\mathrm{rec}\ G = \{0,1\}$, para lo cual necesitamos el siguiente lema

Lema: Para cada $(x,y)\in\beta\times\beta$ se verifica $G(x,y)<\beta$.
En efecto: recordemos que, para cada $(x,y)\in\beta\times\beta$, resulta de la proposición 11 (cap. VI, §1; pág. 270)

$$(x,y) \in [(x\cup y)+1]\times[(x\cup y)+1]$$

y que el segmento de extremo (x,y), por la ordenación $\leq_1$, es una subclase de $[(x\cup y)+1]\times[(x\cup y)+1]$. Distingamos dos casos:

a) $\beta = \mathbb{N}$.

En tal situación, para cada $(x,y) \in \beta \times \beta$ resultará que x e y son conjuntos finitos, luego lo será, asímismo, el conjunto $[(x \cup y)+1] \times [(x \cup y)+1]$, de donde concluimos que el segmento de extremo (x,y), en $\beta \times \beta$, será finito, Ahora bien, teniendo presente que rec G es un segmento de $(\theta, \leq)$, deducimos que el segmento de extremo $G(x,y)$ en $(\theta, \leq)$ será, asímismo, finito. Conclusión: $G(x,y) < \mathbb{N} = \beta$.

b) $\beta \neq \mathbb{N}$.

Si $(x,y) \in \beta \times \beta$ entonces, o bien $x \cup y$ es un conjunto finito y en cuyo caso, mediante un razonamiento similar al anterior, deducimos $G(x,y) < \mathbb{N} < \beta$; o bien $x \cup y$ es un conjunto no finito, en cuyo caso resulta

$$\mathbb{N} < \text{Card}\,[(x \cup y)+1] = \text{Card}(x \cup y) < \beta,$$

ya que $x \cup y \in \theta$ y $x \cup y < \beta$, luego

$$\text{Card}(x \cup y) \leq x \cup y < \beta.$$

Ahora bien, puesto que $\beta = \text{mín } A$ obtenemos

$$\text{Card}([(x \cup y)+1] \times [(x \cup y)+1]) = \text{Card}\,[(x \cup y)+1] < \beta.$$

Por otra parte, $G(x,y) \in \theta$ coincide con el segmento de extremo $G(x,y)$ en $(\theta, \leq)$, que será un subconjunto de rec G; por tanto, para cada $(z,t) \in G(x,y)$ existirá

$$(z',t') \in [(x \cup y)+1] \times [(x \cup y)+1]$$

verificando $G(z',t') = (z,t)$; en consecuencia existirá una aplicación epiyectiva del conjunto

$$[(x \cup y)+1] \times [(x \cup y)+1]$$

en $G(x,y)$, luego (ver problema 8)

$$\text{Card } G(x,y) \leq \text{Card}([(x \cup y)+1] \times [(x \cup y)+1]),$$

es decir $\text{Card } G(x,y) < \beta = \text{Card } \beta$ y, por tanto $G(x,y) < \beta$

Del lema anterior resulta, inmediatamente, que rec G = {0,1} ya

que, en caso contrario, al ser rec G un segmento de $(\theta,\leq)$ existiría un número natural $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ verificando

$$(\exists(x,y))((x,y)\in\beta\times\beta \wedge G(x,y) = n < \beta)$$

y teniendo presente que $\beta =$ min A deduciríamos

$$(\exists n)(n\in\mathbb{N} - \{0,1\} \wedge \text{Card}(n\times n) = n)$$

Conclusión: rec G $\neq \{0,1\}$.

Con ello hemos demostrado la existencia de un número cardinal β = mín $A\in\Omega-\mathbb{N}$ y de una única gráfica G verificando:

i) G es un morfismo de orden de $(\beta\times\beta,\leq_1)$ en $(\theta,\leq)$.
ii) dom G = $\beta\times\beta$.
iii) rec G = $\{0,1\}$.

Ahora bien, es obvio que para un tal cardinal $\beta\in\Omega-\mathbb{N}$ existe más de una gráfica G verificando las condiciones anteriormente citadas y, en consecuencia, no puede existir el cardinal β (elemento mínimo de la clase A en $(\theta,\leq)$); de donde concluimos, finalmente, que $A = \emptyset$, lo que completa la demostración del teorema.

□

Teorema de Cantor

Para cada conjunto A se verifica Card A < Card P(A).

Demostración:

Supongamos que existiera un conjunto A tal que Card A = = Card P(A). En tal situación A sería equipotente a P(A), luego existiría una aplicación biyectiva f de A en P(A). Puesto que $B = \{x: x\in A \wedge x\notin f(x)\}$ es un subconjunto de A, existirá un único elemento $a\in A$ tal que $f(a) = B$ y teniendo presente que $a \in U$ concluimos $[a\in B = f(a) \Leftrightarrow a \notin f(a)]$, lo que es una contradicción. □

Corolario

La clase Ω no es un conjunto.

En efecto: si Ω fuese un conjunto, del axioma de amalgamación deducimos que $\cup\Omega$ es un conjunto. Teniendo presente que todo elemento de Ω es un subconjunto de $\cup\Omega$, resultará Card $P(\cup\Omega) \subset \cup\Omega$. Por tanto Card $P(\cup\Omega)$ = Card[Card $P(\cup\Omega)$] $\leq$ Card $\cup\Omega$, lo que contradice el teorema de Cantor.

□ □

§6. LA HIPOTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO. LA HIPOTESIS DEL CONTINUO LA HIPOTESIS DE LOS "ALEPH"

La hipótesis generalizada del contínuo establece que si A es un conjunto infinito y B es un subconjunto de P(A) tal que existe un conjunto C que contiene a A y es equipotente a B, entonces el conjunto B es equipotente al conjunto A o al conjunto P(A).

La hipótesis del contínuo es el caso particular de la hipótesis generalizada, cuando A es el conjunto de los números naturales. Es decir, la hipótesis del continuo establece la no existencia de un conjunto cuyo cardinal esté estrictamente comprendido entre Card $\mathbb{N}$ y Card $P(\mathbb{N})$.

Fueron Tarski y Lindenbaum quienes, en 1926, admitieron que la hipótesis generalizada del contínuo implicaba el axioma de la elección, conjetura que sería demostrada por Sierpinski en 1947.

En 1933 Gödel demostró que la hipótesis generalizada del contínuo y, por tanto, la hipótesis del contínuo son compatibles con la axiomática Z-F (incluyendo el axioma de la elección).

En 1963 Paul Cohen demostró que el axioma de la elección no implica la hipótesis del contínuo y, por tanto, no implicará la hipótesis generalizada del contínuo.

A continuación, vamos a introducir unas cardinales de singular importancia: los "aleph".

Teorema 1

Existe una única gráfica G de θ en $\Omega-\mathbf{N}$, que es un morfismo de orden de $(\theta,\leq)$ en $(\Omega-\mathbf{N},\leq)$, verificando: dom $G = \theta$ y rec $G = \Omega-\mathbf{N}$.

Demostración:

De la proposición 7 (cap. II; § 4; pág. 139) deducimos la existencia de una gráfica G de θ en $\Omega-\mathbf{N}$ tal que es un morfismo de orden de $(\text{dom } G,\leq)$ en $(\text{rec } G,\leq)$, verificando que dom G es un segmento de $(\theta,\leq)$, rec G es un segmento de $(\Omega-\mathbf{N},\leq)$ y, además, dom $G = \theta$ o rec $G = \Omega-\mathbf{N}$.

Ahora bien, teniendo presente que todos los segmentos de $(\theta,\leq)$ distintos de θ y los de $(\Omega-\mathbf{N},\leq)$ distintos de $\Omega-\mathbf{N}$ son conjuntos, deducimos que dom $G = \theta$ y rec $G = \Omega-\mathbf{N}$.

Finalmente, si H es otra tal gráfica entonces teniendo presente que dom G = dom $H = \theta$, de la proposición 6 (cap. II; §4; pág. 138) concluimos $G|_\theta = H|_\theta$; es decir $G = H$.

□

Notaremos por χ ("aleph") a la gráfica cuya existencia y unicidad garantiza el teorema anterior; asímismo, para cada número ordinal $\alpha \in \theta$ designaremos por χ_α a la imagen de α por la gráfica χ. El primer cardinal no finito (Card $\mathbf{N}$) será χ_o y el primer cardinal no numerable será χ_1.

La hipótesis de los aleph establece que para cada número ordinal α se verifica $\chi_{\alpha+1} = \text{Card } P(\chi_\alpha)$.

Dicha hipótesis sería conjeturada en primer lugar de forma implícita por Cantor en 1833 para $\alpha=0$ (publicando posteriormente D. Hilbert una demostración errónea de dicha conjetura) y después en 1908 formulada en los actuales términos por Hausdorff.

Prescindiendo del axioma de la elección en la teoría N-B-G resulta, trivialmente, que la hipótesis generalizada del contínuo implica la hipótesis de los aleph.

En 1960 H. Rubin demostró que la hipótesis de los aleph implica el axioma de la elección.

Ahora bien, admitiendo el axioma de la elección y teniendo presente que, en tales circunstancias, podemos asociar a cada conjunto su cardinal, resultará que la hipótesis de los aleph implica la hipótesis generalizada del contínuo. En definitiva, en la axiomática N-B-G la hipótesis de los aleph es equivalente a la hipótesis generalizada del contínuo.

Proposición 1

Si α y β son números ordinales, entonces se verifica

$$[\alpha < \chi_\beta] \Leftrightarrow [\text{Card } \alpha < \text{Card } \chi_\beta].$$

Demostración:

Si $\alpha < \chi_\beta$ entonces $\alpha < \chi_\beta = \text{Card } \chi_\beta$, luego $\text{Card}\,\alpha \leq \alpha < \text{Card } \chi_\beta$.

Recíprocamente, si $\text{Card } \alpha < \text{Card } \chi_\beta$ entonces resulta $\alpha < \text{Card } \chi_\beta = \chi_\beta$.

□

Proposición 2

$$(\forall\alpha)(\alpha \in \theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Card}(\chi_\alpha \times \chi_\alpha) = \chi_\alpha)$$

Demostración:

Basta tener presente que, para cada número ordinal α se verifica $\chi_\alpha \in \Omega - \mathbb{N}$.

□

PROBLEMAS

1.- Si A es una clase y notamos $P(A) = \{x: x \subset A\}$ demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) A es una clase transitiva.
b) $\cup A \subset A$.
c) $A \subset P(A)$.
d) $P(A)$ es una clase transitiva.

Indicación: Pruébese a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a). Para d) $\Rightarrow$ a) obsérvese que $A = \cup P(A)$ y que si B es transitiva entonces $\cup B$ es transitiva.

2. Si A es una clase transitiva demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) A es un conjunto.
b) $P(A)$ es un conjunto.

3.- Demostrar que U es una clase propia transitiva, $P(\mathbb{N})$ es un conjunto transitivo y, en cambio, ni U ni $P(\mathbb{N})$ son ordinales.

4.- Demostrar la veracidad de la proposición

$$(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow \cup x^{+} = x).$$

¿Es cierta la relación $\cup \theta^{+} = \theta$?.

5.- Si A es un subconjunto no vacío de θ demostrar que $\cap A \in \theta$ es el elemento mínimo de A, respecto de la ordenación inducida por la usual de θ en A.
Indicación: Sea $x \in A$; si $x \neq$ mín A considérese $y =$ mín $x \cap A$; probar entonces que $y =$ mín $A = \cap A$.

6.- Demostrar que todo elemento de $\mathbb{N}^{+}$ es un conjunto numerable y que si A es un subconjunto numerable de $\mathbb{N}^{+}$ entonces el supremo de A en $(\theta, \leq)$ es un elemento de $\mathbb{N}^{+}$.
Indicación: Para el último apartado utilícese la proposición 9 (§1) y sus corolarios, observando que la reunión de una familia numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

7.- Si A y B son dos conjuntos demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) Existe una aplicación inyectiva de A en B.
b) Card A $\leq$ Card B.

Indicación: b) $\Rightarrow$ a). Tened presente que todo conjunto es equipotente a su cardinal.

8.- Si A y B son dos conjuntos demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) Existe una aplicación epiyectiva de A en B.
b) Card A $\geq$ Card B.

Indicación: Utilizar el problema anterior y las caracterizaciones de epiyectividad e inyectividad mediante secciones y retracciones.

9.- Demostrar la veracidad de la proposición

$$(\forall A)(\forall x)(A\in\theta \wedge x\in A \Rightarrow A\not\subset x)$$

Indicación: Suponed la existencia de un conjunto ordinal A y de un elemento $x\in A$ tal que $A\subset x$ y llegar a una contradicción

10.-Consideremos

$$k_I = \{x: (x\in\theta) \wedge (\exists y)(y\in\theta \wedge x=y^+)\}$$
$$k_{II} = \theta - k_I.$$

(los elementos de k_I se denominan ordinales de primera especie y los elementos de k_{II} ordinales de segunda especie).
Demostrar que $k_{II} = \{x: (x\in\theta) \wedge (x=\cup x)\}$.
Indicación: Téngase presente el problema 4.

11.-Sea A un conjunto infinito:
a) demostrar que Card $P(A\times A)$ = Card $P(A)$.
b) demostrar que el conjunto

$$\pi(A) = \{\Delta: \Delta \text{ es una partición de } A\}$$

es equipotente a $P(A)$.
c) demostrar que $F(A;A)$ es equipotente a $P(A)$.

Indicación: a) Téngase presente que del teorema 1 (§5) deducimos que el conjunto $A\times A$ es equipotente a A, si A es infinito.

b) Considérese la aplicación $f \in F(\pi(A);P(A\times A))$ definida así: si $\{A_i\}_{i\in I} \in \pi(A)$ entonces

$$f(\{A_i\}_{i\in I}) = \bigcup_{i\in I} A_i \times A_i .$$

c) Obsérvese que Card $F(A;A) \leq$ Card $P(A\times A)$.

12.- Demostrar que la aplicación $f \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida por

$$f(n) = n+1 \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$$

carece de secciones y, en cambio, posee infinitas retracciones. Indicación: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese $\varphi_n \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida por

$$\varphi_n(x) = x \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{N}-\{0\} \quad \text{y} \quad \varphi_n(0) = n.$$

Obsérvese que f no es epiyectiva.

13.- Demostrar que la aplicación $f \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida por $f(n) = k$ si $n=2k$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ y $f(n) = k$ si $n=2k+1$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ carece de retracciones y, en cambio, posee infinitas secciones. Indicación: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese $\varphi_n \in F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ definida así:

$$\varphi_n(n) = n \quad \text{y} \quad \varphi_n(x) = 2x+1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{N} - \{n\}.$$

Obsérvese que f no es inyectiva.

14.- Si A es un conjunto y R es una relación de equivalencia en A, demostrar que Card $A/R \leq$ Card A. Indicación: Considérese una función de elección φ de A y defínase $f \in F(A/R,A)$ así: para cada $\overline{x} \in A/R$, $f(\overline{x}) = \varphi(\overline{x})$.

15.- Demostrar que si A es una clase transitiva no vacía entonces $\emptyset \in A$. Indicación: Aplíquese el axioma de regularidad.

16.- Demostrar que una clase A es transitiva si y sólo sí verifica la condición $(\forall x)(x\in A \Rightarrow x^+ \subset A)$.

17.- a) Demostrar que si A es una clase transitiva entonces la clase siguiente A^+ y la clase $\cup A$ son transitivas.
b) Demostrar que si A es un conjunto entonces A es transitivo si y sólo si A^+ es transitivo.
c) Mediante un contraejemplo, pruébese que b) es falso para clases propias.
Indicación: c) Basta considerar una clase propia no transitiva, por ejemplo $A = \theta \cup \{\{\{1\}\}\}$.

18.- Demostrar que si A es un conjunto entonces son equivalentes las proposiciones:
i) A es un conjunto transitivo.
ii) $\cup A^+ = A$.
Mediante un contraejemplo, pruébese la existencia de una clase propia transitiva A tal que $\cup A^+ \neq A$.
Indicación: Para el contraejemplo, considérese $A = \theta$.

19.- Si A es un conjunto entonces definimos por recurrencia

$$\cup^{\circ} A = A \quad \text{y} \quad (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup^{n+1} A = \cup(\cup^{n} A)).$$

Consideremos $\hat{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\cup^{n} A)$.
Demostrar: a) $\hat{A}$ es un conjunto transitivo tal que $A \subset \hat{A}$.
b) Si B es un conjunto transitivo tal que $A \subset B$ entonces $\hat{A} \subset B$.
(el conjunto $\hat{A}$ recibe el nombre de clausura transitiva del conjunto A).
Indicación: b) Si B es un conjunto transitivo tal que $A \subset B$ probar por inducción completa que $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup^{n} A \subset B)$.

20.- (Sobre el axioma de regularidad).
En la teoría axiomática N-B-G prescindiendo del axioma V (de regularidad), demostrar la equivalencia de las proposiciones:
a) Axioma de regularidad.
b) Si A es un conjunto no vacío entonces existe un elemento $x \in A$ tal que $x \cap A = \emptyset$ (axioma débil de regularidad).
Indicación: b) $\Rightarrow$ a). Sea A una clase no vacía y $x \in A$. Si $x \cap A \neq \emptyset$ y notamos $y = x \cap A$, aplíquese b) al conjunto no vacío $\hat{y} \cap A$.

21.- (Teorema de ε-inducción transfinita para clases transitivas)
Si A es una clase transitiva y B es una subclase de A tal que

$(\forall x)(x\in A \wedge x\subset B \Rightarrow x\in B)$, demostrar que $B=A$.
Indicación: Téngase presente el problema 38 del capítulo I.

22.- Diremos que una gráfica funcional G de una clase A en una clase B es un ε-isomorfismo de A en B si y sólo sí: dom $G = A \wedge$ rec $G = B \wedge G^{-1}$ es funcional $\wedge$ $(\forall x)(\forall y)(x\in A \wedge y\in A \Rightarrow (x\in y \Leftrightarrow G(x)\in G(y)))$. Demostrar que si A es una clase transitiva entonces el único ε-isomorfismo de A en A es Δ_A.
Indicación: Si G es un ε-isomorfismo de A en A considérese la clase $B = \{x: x\in A \wedge x\neq G(x)\}$. Suponed $B\neq\emptyset$ y llegad a una contradicción aplicando el axioma de regularidad.

23.- Demostrar que si A y B son dos clases transitivas ε-isomorfas (es decir, existe un ε-isomorfismo de A en B) entonces A=B.
Indicación: Si G es un ε-isomorfismo de A en B considérese la clase $C = \{x: x\in A \wedge G(x)=x\}$ y pruébese que $(\forall x)(x\in A \wedge x\subset C \Rightarrow x\in C)$.

24.- Demostrar que si A es una clase y B es una subclase transitiva de A ε-isomorfa a A entonces B=A.
Indicación: Si G es un ε-isomorfismo de A en B considérese la clase $C = \{x: x\in B \wedge G(x)=x\}$ y pruébese que $(\forall x)(x\in B \wedge x\subset C \Rightarrow x\in C)$ concluyendo que $G_{|B} = \Delta_B$.

25.- Demostrar que la clase θ de los números ordinales no puede ser ε-isomorfa a la clase $P(\theta) = \{x: x\subset\theta\}$.
Indicación: Téngase presente el problema anterior y que $\theta\subset P(\theta)$

26.- Si A es un conjunto, demostrar la existencia de una única clase $\check{A}$ verificando $(\forall x)(x\in\check{A} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\subset\check{A})$.
(la clase $\check{A}$ se denomina interior transitivo del conjunto A).
Indicación: Para establecer la existencia pruébese que la clase $\tilde{A} = \{x: (\exists B)(B\subset A \wedge B \text{ transitivo} \wedge x\in A \wedge x\subset B)\}$ verifica $(\forall x)(x\in\tilde{A} \Leftrightarrow x\in A \wedge x\subset\tilde{A})$.

27.- Demostrar que si A es un conjunto entonces el interior transitivo $\breve{A}$ es el mayor (por la relación de inclusión) con junto transitivo contenido en A.

28.- (Teorema de recurrencia transfinita para ordinales)
Sea A una clase no vacía, $a \in A$ y F una gráfica funcional de A en A cuyo dominio es A. Supongamos que si B es un subconjunto no vacío de A entonces $\cup B \in A$. Demostrar la existencia de una única gráfica funcional G de θ en A verificando:
i) dom G = θ.
ii) G(0) = a.
iii) $(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow G(x \cup \{x\}) = F(G(x)))$.
iv) $(\forall x)(x \in k_{II} \Rightarrow G(x) = \bigcup_{y \in x} G(y))$.
Indicación: Considérese la gráfica de recurrencia H del tipo $(\theta, \leq)$ en A definida así: $H(\emptyset) = a$ y si $x \in \theta - \{0\}$ y $R \in G(S(x);A)$ entonces $H(R) = F(R(y))$ si $x \in k_I \wedge x = y^+$, y $H(R) = \bigcup_{y \in x} R(y)$ si $x \in k_{II}$. Aplíquese el teorema de recurrencia transfinita para clases bien ordenadas (problema nº 36 del capítulo II).

29.- (Definición de la suma en θ por recurrencia transfinita)
a) Demostrar que si $\alpha \in \theta$ entonces existe una única gráfica funcional φ_α de θ en θ verificando:
i) dom $\varphi_\alpha = \theta$.
ii) $\varphi_\alpha(0) = \alpha$.
iii) $(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow \varphi_\alpha(x^+) = [\varphi_\alpha(x)]^+)$.
iv) $(\forall x)(x \in k_{II} \Rightarrow \varphi_\alpha(x) = \bigcup_{y \in x} \varphi_\alpha(y))$.
b) Demostrar la existencia de una única gráfica funcional φ de $\theta \times \theta$ en θ verificando:
i) dom $\varphi = \theta \times \theta$.
ii) $(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow \varphi(x,0) = x)$.
iii) $(\forall x)(\forall y)(x \in \theta \wedge y \in \theta \Rightarrow \varphi(x,y^+) = [\varphi(x,y)]^+)$.
iv) $(\forall x)(\forall y)(x \in \theta \wedge y \in k_{II} \Rightarrow \varphi(x,y) = \bigcup_{z \in y} \varphi(x,z))$.
(Suele notarse $\varphi(x,y) = x+y$, para cada $x \in \theta$ e $y \in \theta$).
Indicación: a) Aplíquese el problema anterior al esquema $A = \theta$, $a = \alpha$ y $F(x) = x^+$ $(\forall x \in \theta)$. b) Considérese $\varphi(x,y) = \varphi_x(y)$.

30.- (Definición del producto en θ por recurrencia transfinita)
a) Demostrar que si $\alpha \in \theta$ entonces existe una única gráfica funcional ψ_α de θ en θ verificando:
i) dom $\psi_\alpha = \theta$.
ii) $\psi_\alpha(0) = 0$.
iii) $(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow \psi_\alpha(x^+) = \alpha + \psi_\alpha(x))$.
iv) $(\forall x)(x \in k_{II} \Rightarrow \psi_\alpha(x) = \bigcup_{y \in x} \psi_\alpha(y))$.

b) Demostrar la existencia de una única gráfica funcional ψ de $\theta \times \theta$ en θ verificando:

i) $\operatorname{dom} \psi = \theta \times \theta$.

ii) $(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow \psi(x,0) = 0)$

iii) $(\forall x)(\forall y)(x \in \theta \wedge y \in \theta \Rightarrow \psi(x,y^+) = x + \psi(x,y))$.

iv) $(\forall x)(\forall y)(x \in \theta \wedge y \in k_{II} \Rightarrow \psi(x,y) = \bigcup_{z \in y} \psi(x,z))$.

(Suele notarse $\psi(x,y) = x \cdot y$, para cada $x \in \theta$ e $y \in \theta$).

Indicación: a) Aplíquese el problema 28 al esquema $A=\theta$, $a=0$ y $F = \varphi_\alpha$ b) Considérese $\psi(x,y) = \psi_x(y)$.

31.- (Definición de la exponenciación en θ por recurrencia transfinita)

a) Demostrar que si $\alpha \in \theta - \{0\}$ entonces existe una única gráfica funcional ρ_α de θ en θ verificando:

i) $\operatorname{dom} \rho_\alpha = \theta$.

ii) $\rho_\alpha(0) = 1$

iii) $(\forall x)(x \in \theta \Rightarrow \rho_\alpha(x^+) = \alpha\, \rho_\alpha(x))$.

iv) $(\forall x)(x \in k_{II} \Rightarrow \rho_\alpha(x) = \bigcup_{y \in x} \rho_\alpha(y))$.

b) Demostrar la existencia de una única gráfica funcional ρ de $\theta \times \theta$ en θ verificando:

i) $\operatorname{dom} \rho = (\theta - \{0\}) \times \theta$.

ii) $(\forall x)(x \in \theta - \{0\} \Rightarrow \rho(x,0) = 1)$.

iii) $(\forall x)(\forall y)(x \in \theta - \{0\} \wedge y \in \theta \Rightarrow \rho(x,y^+) = x \cdot \rho(x,y))$.

iv) $(\forall x)(\forall y)(x \in \theta - \{0\} \wedge y \in k_{II} \Rightarrow \rho(x,y) = \bigcup_{z \in y} \rho(x,z))$.

(Suele notarse $\rho(x,y) = x^y$, para cada $x \in \theta - \{0\}$ e $y \in \theta$).

Indicación: a) Aplíquese el problema 28 al esquema: $A = \theta$, $a=1$ y $F = \psi_\alpha$ b) Considérese $\rho(x,y) = \rho_x(y)$.

32.- Demostrar que un conjunto A es un ordinal si y sólo sí A es transitivo y, además, para cada subconjunto no vacío B de A existe $x \in B$ verificando la relación $(\forall y)(y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow x \in y)$.

33.- Si A es una subclase de θ, demostrar que $\cup A = \theta$ sí y sólo sí $A \notin \mathcal{U}$.

Indicación: Téngase presente la proposición 9 del §1 del presente capítulo.

34.- Demostrar la existencia de una única funcional G de $\mathcal{U}$ en Ω verificando:

i) dom G = $\mathcal{U}$.
ii) $(\forall x)(x \in \mathcal{U} \Rightarrow$ x es equipotente a G(x)).
Indicación: Para la existencia, considérese G(x)=Card(x). Para la unicidad de G téngase presente que dos conjuntos son equipotentes sí y sólo sí poseen el mismo cardinal.

35.- Demostrar que una clase A es un ordinal si y sólo sí existe una buena ordenación $\leq$ en A verificando la siguiente condición:

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow S(x)=x).$$

Indicación: Téngase presente que si $\leq$ es una tal buena ordenación en A, entonces coincide con la relación de inclusión en A.

7

EL CONJUNTO Z Y EL CONJUNTO Q

§1. BREVES CONSIDERACIONES ALGEBRAICAS

El objetivo del presente parágrafo es la introducción de los conceptos algebraicos necesarios e imprescindibles para el desarrollo de los parágrafos y capítulos posteriores, limitándonos exclusivamente a la exposición de las proposiciones y teoremas más importantes relativos a dichos conceptos, sin entrar en detalle acerca de las correspondientes demostraciones, que pueden encontrarse en cualquier tratado de álgebra elemental.

Operaciones en un conjunto

Definición: Una operación interna en un conjunto A es una aplicación de $A \times A$ en A.

Si $*$ es una operación interna en un conjunto A, entonces la imagen de $(x,y) \in A \times A$ por dicha aplicación la notaremos $x*y$.

La suma y el producto de números naturales, introducidos en el capítulo IV (§3), constituyen sendas operaciones internas en $\mathbb{N}$.

Definición: Una operación externa en un conjunto A, relativa a un conjunto B, es una aplicación de $B \times A$ en A.

En particular, toda operación interna en un conjunto A es una operación externa en A relativa a sí mismo.

Si A es un conjunto y $*$ es una operación interna en A, entonces:

a) diremos que $*$ es asociativa en A sí y sólo sí para cada $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ se verifica:

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

b) diremos que $*$ es conmutativa en A sí y sólo sí para cada $x \in A$, $y \in A$ se verifica:

$$x*y = y*x$$

c) diremos que $*$ posee la propiedad de existencia de elemento neutro en A sí y sólo sí existe un elemento $e \in A$ tal que, para cada $x \in A$ se verifica:

$$x*e = e*x = x$$

Trivialmente, el elemento $e \in A$ verificando la condición anterior, si existe, es único y lo denominaremos: el elemento neutro de A respecto de $*$, o más brevemente, el elemento neutro de $(A,*)$.

d) diremos que $*$ posee la propiedad de existencia de elemento inverso en A sí y sólo sí para cada $x \in A$ existe $y \in A$ tal que

$$x*y = y*x = e$$

siendo e el elemento neutro de $(A,*)$.
Es inmediato comprobar que si $*$ es asociativa y posee la propiedad de existencia de elemento inverso en A entonces para cada

elemento $x \in A$ existe un <u>único</u> $y \in A$ tal que $x*y = y*x = e$. En tal situación, diremos que y es el elemento inverso de x en A respecto de $*$, o más brevemente, en $(A,*)$; y notaremos $y=x^{-1}$.

e) diremos que un elemento $a \in A$ es <u>regular</u> en A, respecto de $*$, sí y sólo sí para cada $x \in A$, $y \in A$ se verifica:

$$(x*a = y*a \Rightarrow x = y) \wedge (a*x = a*y \Rightarrow x = y)$$

Finalmente, si $*$ y $\perp$ son operaciones internas en un conjunto A, diremos que $\perp$ es <u>distributiva</u> respecto de $*$ en A sí y sólo sí para cada $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ se verifica:

$$x \perp (y*z) = (x \perp y) * (x \perp z)$$
$$(x*y) \perp z = (x \perp z) * (y \perp z)$$

<u>Semigrupos. Grupos. Subgrupos.</u>

<u>Definición</u>: Diremos que el par ordenado $(A,*)$ es un <u>semigrupo</u>, o bien que A posee estructura de semigrupo respecto de $*$, sí y sólo sí A es un conjunto y $*$ es una operación interna asociativa en A.

Diremos que un semigrupo $(A,*)$ es <u>unitario</u> sí y sólo sí $*$ <u>po</u>see la propiedad de existencia de elemento neutro en A.

Diremos que un semigrupo $(A,*)$ es <u>conmutativo</u> o <u>abeliano</u> sí y sólo sí $*$ es conmutativa en A.

De las anteriores definiciones resulta inmediatamente:

a) $(\mathbb{N},+)$ es un semigrupo unitario y conmutativo, en el que cada número natural es regular.

b) $(\mathbb{N},\cdot)$ es un semigrupo unitario y conmutativo, en el que cada número natural distinto de cero es regular.

Definición: Si $(A,*)$ es un semigrupo unitario, diremos que un elemento $x \in A$ es invertible en $(A,*)$ sí y sólo sí posee elemento inverso en $(A,*)$.

Definición: Diremos que el par ordenado $(A,*)$ es un grupo, o bien que A posee estructura de grupo respecto de $*$, sí y sólo sí $(A,*)$ es un semigrupo unitario en el que cada elemento de A es invertible.

Diremos que un grupo $(A,*)$ es conmutativo o abeliano sí y sólo sí $*$ es conmutativa en A.

Obsérvese que si $(A,*)$ es un grupo, entonces el conjunto A es no vacío ya que al menos posee como elemento el neutro del grupo.

Con frecuencia a los elementos de A los denominaremos también elementos del grupo $(A,*)$, nomenclatura que formalmente es incorrecta.

Trivialmente, $(\mathbb{N},+)$ y $(\mathbb{N},\cdot)$ no son grupos.

Proposición 1

Si $(A,*)$ es un grupo entonces se verifica:

a) Todo elemento de A es regular en $(A,*)$.
b) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x)$.
c) $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1})$

□

Proposición 2

Si $(A,*)$ es un semigrupo, entonces son equivalentes las proposiciones:

a) $(A,*)$ es un grupo.

b) Para cada $a \in A$, $b \in A$ las ecuaciones $x*a = b$ y $a*x = b$ poseen soluciones únicas en A.

□

Definición: Si $(A,*)$ es un grupo, diremos que un subconjunto B de A es un subgrupo de $(A,*)$ sí y sólo sí la restricción de $*$ a $B \times B$ dota a B de estructura de grupo.

Para no complicar excesivamente la notación, representaremos por $*$ la restricción de dicha operación a $B \times B$.

Trivialmente, todo subgrupo de un grupo conmutativo es, asímismo, conmutativo.

Proposición 3

Si $(A,*)$ es un grupo, entonces todos los subgrupos de $(A,*)$ poseen el mismo elemento neutro: el elemento neutro de $(A,*)$.

□

Teorema de caracterización de subgrupos

Si $(A,*)$ es un grupo y B es un subconjunto no vacío de A, entonces son equivalentes las proposiciones:

a) B es un subgrupo de $(A,*)$.

b) $(\forall x)(\forall y)(x \in B \wedge y \in B \Rightarrow x*y^{-1} \in B)$.

□

Proposición 4

La intersección de una familia arbitraria de subgrupos de un grupo $(A,*)$ es un subgrupo de $(A,*)$; en cambio, la reunión de una fa

milia de subgrupos de $(A,*)$ no es, en general, un subgrupo de $(A,*)$.

□

Subgrupos normales. Grupo cociente.

Si $(A,*)$ es un grupo y B es un subgrupo de $(A,*)$, consideramos las relaciones R_B y R'_B en A definidas así: para cada $(x,y) \in A\times A$

$$(x,y) \in R_B \Leftrightarrow x*y^{-1} \in B$$

$$(x,y) \in R'_B \Leftrightarrow x^{-1}* y \in B$$

Se comprueba sin dificultad, como consecuencia de ser B subgrupo de $(A,*)$, que R_B y R'_B son relaciones de equivalencia en A y, además, que:

a) la clase de equivalencia de un elemento $x \in A$ respecto de R_B es el conjunto

$$\{y: (y \in A) \wedge (\exists z)(z \in B \wedge y = z*x)\},$$

que notaremos $B*x$.

b) la clase de equivalencia de un elemento $x \in A$ respecto de R'_B es el conjunto

$$\{y: (y \in A) \wedge (\exists z)(z \in B \wedge y = x*z)\},$$

que notaremos $x*B$.

Definición: Diremos que un subgrupo B de un grupo $(A,*)$ es invariante o normal sí y sólo sí $R_B = R'_B$; es decir, sí y sólo sí $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x*B = B*x)$.

Trivialmente, en un grupo conmutativo todos los subgrupos son normales.

Si $(A,*)$ es un grupo y B es un subgrupo normal de $(A,*)$, definimos en el conjunto cociente A/R_B una operación interna, que notaremos asímismo por $*$, de la siguiente manera: si $\bar{x} \in A/R_B$ e $\bar{y} \in A/R_B$ entonces

$$\bar{x} * \bar{y} = \overline{x * y}$$

Como consecuencia de que B es subgrupo normal de $(A,*)$ resulta que la anterior definición es independiente de los representantes considerados de las respectivas clases de equivalencia.

Proposición 5

Si $(A,*)$ es un grupo y B es un subgrupo normal de $(A,*)$, entonces $(A/R_B,*)$ (siendo $*$ la operación definida anteriormente en A/R_B) es un grupo, que denominaremos grupo cociente de $(A,*)$ por el subgrupo normal B y notaremos $(A/B,*)$.

□

Morfismos de semigrupos

Definición: Si $(A,*)$ y $(B,\perp)$ son semigrupos, diremos que una aplicación $f \in F(A;B)$ es un morfismo de $(A,*)$ en $(B,\perp)$ sí y sólo sí para cada $x \in A$, $y \in A$ se verifica:

$$f(x*y) = f(x) \perp f(y)$$

Si, además, f es inyectiva (respectivamente, epiyectiva o biyectiva) diremos que f es un monomorfismo (respectivamente, epimorfismo o isomorfismo) de $(A,*)$ en $(B,\perp)$. Diremos que un semigrupo $(A,*)$ es isomorfo a un semigrupo $(B,\perp)$ sí y sólo sí existe un isomorfismo de $(A,*)$ en $(B,\perp)$.

Definición: Si f es un morfismo del grupo $(A,*)$ en el grupo $(B,\perp)$ entonces el núcleo de f, que notaremos por Ker f, es el conjunto:

$$\text{Ker } f = \{x: \ x \in A \wedge f(x) = e\}$$

siendo e el elemento neutro de $(B,\perp)$.

Proposición 6

Si f es un morfismo del grupo $(A,*)$ en el grupo $(B,\perp)$, e_1 es el elemento neutro de $(A,*)$ y e_2 es el elemento neutro de $(B,\perp)$, entonces se verifica:

a) $f(e_1) = e_2$

b) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1})$

c) Ker f es un subgrupo normal de $(A,*)$.

d) $f(A)$ es un subgrupo de $(B,\perp)$.

e) f es un monomorfismo sí y sólo sí Ker $f = \{e_1\}$.

□

Proposición 7

En la clase cuyos elementos son los grupos, la relación "ser isomorfo" es de equivalencia.

□

Teorema de descomposición canónica de un morfismo de grupos

Si f es un morfismo del grupo $(A,*)$ en el grupo $(B,\perp)$, entonces existe un isomorfismo $\bar{f}$ de $(A/\text{Ker } f,*)$ en $(f(A),\perp)$ tal que $f = i_{f(A)} \circ \bar{f} \circ \Pi_{R_{\text{Ker } f}}$; donde $\Pi_{R_{\text{Ker } f}}$ es la epiyección canónica asociada a la relación de equivalencia $R_{\text{Ker } f}$ (que es un epimorfismo), e $i_{f(A)}$ es la inyección canónica de $f(A)$ en B (que es un monomorfismo).

□

Del teorema anterior resulta, pues, que el grupo cociente $(A/\text{Ker } f, *)$ es isomorfo a $(f(A),\perp)$.

Semianillos. Anillos.

Definición: Diremos que una terna ordenada $(A,*,\perp)$ es un semianillo, o bien que A posee estructura de semianillo respecto de $*$ y $\perp$ (¡en este orden!), sí y sólo sí:

a) $(A,*)$ es un semigrupo unitario y conmutativo.
b) $(A,\perp)$ es un semigrupo.
c) $\perp$ es distributiva respecto de $*$ en A.

Diremos que un semianillo $(A,*,\perp)$ es unitario (respectivamente, conmutativo) sí y sólo sí $\perp$ posee la propiedad de existencia de elemento neutro en A (respectivamente, $\perp$ es conmutativa en A).

De las anteriores definiciones resulta, inmediatamente, que $(\mathbb{N},+,\cdot)$ es un semianillo unitario y conmutativo; en cambio, obviamente, $(\mathbb{N},\cdot,+)$ no es un semianillo, ya que la suma no es distributiva respecto del producto en $\mathbb{N}$.

Definición: Diremos que la terna ordenada $(A,*,\perp)$ es un anillo sí y sólo sí $(A,*,\perp)$ es un semianillo tal que, todo elemento de A es invertible respecto de $*$.

Diremos que un anillo $(A,*,\perp)$ es unitario (respectivamente, conmutativo) sí y sólo sí $\perp$ posee la propiedad de existencia de elemento neutro en A (respectivamente, $\perp$ es conmutativa en A).

Notación: En todo lo que sigue y a fín de simplificar la nomenclatura, convendremos en representar por $+$ (suma) la primera operación interna de la estructura de anillo, y por $\cdot$ (producto) la segunda operación interna de dicha estructura.

Notaremos por 0 (respectivamente, 1) el elemento neutro respecto de la suma (respectivamente, producto). Si en un anillo se verifica $0=1$, entonces el único elemento del conjunto en el que está definida la estructura de anillo, es 0, y en tal situación diremos

que el anillo es trivial. Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo y $x \in A$, notaremos por $-x$ el elemento inverso de x respecto de la suma, y por x^{-1} o $1/x$ el elemento inverso respecto del producto (si existe).

Si $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ y $x \in A$ notaremos nx a la suma del elemento x consigo mismo n veces, que tiene sentido gracias a la asociatividad de la suma en A (si $n=0$ convendremos en notar $0x = 0$); y análogamente, notaremos x^n al producto del elemento x consigo mismo n veces (si, además, el anillo es unitario, convendremos en notar $x^0 = 1$).

Proposición 8

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo, entonces para cada $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$, $m \in \mathbb{N}-\{0\}$, $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ se verifica:

a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

b) $x \cdot (y-z) = x \cdot y - x \cdot z$

c) $(x-y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z$

d) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

e) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

f) $(m+n)x = mx + nx$

g) $(m \cdot n)x = m(nx)$

h) $m(x \cdot y) = (mx) \cdot y$

i) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

j) $(-x)^n = x^n$ si n es un número natural par.

k) $(-x)^n = -x^n$ si n es un número natural impar.

l) Si, además, el anillo es unitario y conmutativo, entonces

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + x \cdot y^{n-2} + y^{n-1})$$

□

Definición: Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo, diremos que un elemento $x \in A$ es invertible en $(A,+,\cdot)$ sí y sólo sí x posee elemento inverso respecto del producto en A.

Definición: Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo, diremos que un elemento $x \in A-\{0\}$ es un divisor de cero sí y sólo sí existe $y \in A-\{0\}$ tal que $x \cdot y = 0$.

Definición: Un anillo conmutativo $(A,+,\cdot)$ diremos que es íntegro o un dominio de integridad sí y sólo sí carece de divisores de cero.

Subanillos e ideales.

Definición: Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo, entonces diremos que un subconjunto B de A es un subanillo de $(A,+,\cdot)$ sí y sólo sí las restricciones de $+$ y $\cdot$ a $B \times B$ (en ese orden) dotan a B de estructura de anillo.

Trivialmente, todo subanillo de un anillo conmutativo es, asímismo, conmutativo; en cambio, un subanillo de un anillo unitario no tiene porqué ser unitario.

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo, entonces $\{0\}$ y A son subanillos de $(A,+,\cdot)$.

Definición: Si un subanillo conmutativo B de un anillo $(A,+,\cdot)$ carece de divisores de cero en $(A,+,\cdot)$, entonces diremos que B es un subdominio de integridad de $(A,+,\cdot)$.

Teorema de caracterización de subanillos

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo y B es un subconjunto no vacío de A, entonces son equivalentes las proposiciones:

a) B es un subanillo de $(A,+,\cdot)$

b) Para cada $x \in B$ e $y \in B$ se verifica

$$(x-y \in B) \wedge (x \cdot y \in B)$$

□

Proposición 9

La intersección de una familia arbitraria de subanillos de un anillo $(A,+,\cdot)$ es un subanillo de $(A,+,\cdot)$; en cambio, la reunión de una familia de subanillos de $(A,+,\cdot)$ no es, en general, un subanillo de $(A,+,\cdot)$.

□

Definición: Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo e I es un subconjunto de A, diremos que I es un ideal a la derecha (respectivamente, a la izquierda) de $(A,+,\cdot)$ sí y sólo sí

a) I es un subgrupo de $(A,+)$.
b) Para cada $x\in A$ e $y\in I$ se verifica $y\cdot x\in I$ (respectivamente, $x\cdot y\in I$).

Diremos que I es un ideal del anillo $(A,+,\cdot)$ sí y sólo sí I es un ideal a la izquierda y a la derecha de $(A,+,\cdot)$.

Obsérvese que todo ideal de un anillo es un subanillo; además, si $(A,+,\cdot)$ es un anillo entonces $\{0\}$ y A son ideales de $(A,+,\cdot)$. Asímismo, si notamos, para cada $x\in A$: $(x) = \{y: (\exists z)(z\in A \wedge y=z\cdot x)\}$ resulta que (x) es un ideal de $(A,+,\cdot)$, en el caso de que el anillo sea conmutativo.

Definición: Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo, diremos que un ideal I de $(A,+,\cdot)$ es principal sí y sólo sí existe $a\in A$ tal que $I = (a)$.

Diremos que un anillo conmutativo $(A,+,\cdot)$ es principal sí y sólo sí todos los ideales de dicho anillo son principales.

Definición: Un ideal I de un anillo $(A,+,\cdot)$ diremos que es maximal sí y sólo sí para cada ideal J de $(A,+,\cdot)$ que verifique $I\subset J\subset A$ resulta $(I=J)\vee(J=A)$.

Definición: Un ideal I de un anillo $(A,+,\cdot)$ diremos que es primo sí y sólo sí para cada $x \in A$, $y \in A$ se verifica

$$[x \cdot y \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I]$$

Proposición 10

En un anillo unitario y conmutativo todo ideal maximal es primo; el recíproco es falso.

□

Proposición 11

En un anillo unitario $(A,+,\cdot)$, para cada ideal $I \neq A$ del anillo existe un ideal maximal $J \neq A$ tal que $I \subset J$.

□

Anillo cociente por un ideal

Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo e I un ideal de $(A,+,\cdot)$. Puesto que I es un subgrupo conmutativo de $(A,+)$ podemos considerar el grupo cociente $(A/I,+)$; pues bien, si definimos un producto en A/I así: para cada $\bar{x} \in A/I$ e $\bar{y} \in A/I$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$$

resulta, inmediatamente, de las propiedades que caracterizan a los ideales que la anterior definición es independiente de los representantes considerados de las respectivas clases de equivalencia.

Proposición 12

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo e I es un ideal de $(A,+,\cdot)$, entonces $(A/I, +,\cdot)$ es un anillo, respecto de las operaciones consideradas (y que denominaremos, anillo cociente de $(A,+,\cdot)$ por el ideal I).

□

Trivialmente, si el anillo $(A,+,\cdot)$ es unitario (respectivamente, conmutativo), entonces el anillo cociente $(A/I,+,\cdot)$ es unitario (respectivamente, conmutativo).

Proposición 13

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo, entonces un ideal I de $(A,+,\cdot)$ es primo sí y sólo sí $(A/I,+,\cdot)$ es un dominio de integridad.

□

Morfismos de semianillos

Definición: Si $(A,+,\cdot)$ y $(B,+,\cdot)$ son semianillos, diremos que una aplicación $f \in F(A;B)$ es un morfismo de $(A,+,\cdot)$ en $(B,+,\cdot)$ sí y sólo sí para cada $x \in A$, $y \in A$ se verifica:

a) $f(x+y) = f(x)+f(y)$

b) $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$.

Diremos que un morfismo de semianillos es monomorfismo (respectivamente, epimorfismo o isomorfismo) sí y sólo sí la aplicación que lo define es inyectiva (respectivamente, epiyectiva o biyectiva).

Diremos que un semianillo $(A,+,\cdot)$ es isomorfo a un semianillo $(B,+,\cdot)$ sí y sólo sí existe un isomorfismo de $(A,+,.)$ en $(B,+,\cdot)$.

Todo morfismo de anillo es, en particular, un morfismo de grupos, respecto de las estructuras de grupo subyacentes en dichos anillos; por lo cual, para estos morfismos serán válidas todas las propiedades relativas a los morfismos de grupos.

Proposición 14

Si f es un morfismo de un anillo $(A,+,\cdot)$ en un anillo $(B,+,\cdot)$ entonces se verifica:

a) Ker f es un ideal de $(A,+,\cdot)$.

b) f(A) es un subanillo de $(B,+,\cdot)$.

□

Proposición 15

En la clase cuyos elementos son los anillos, la relación "ser isomorfo" es de equivalencia.

□

Teorema de descomposición canónica de un morfismo de anillos

Si f es un morfismo del anillo $(A,+,\cdot)$ en el anillo $(B,+,\cdot)$ entonces existe un isomorfismo $\bar{f}$ de $(A/\text{Ker } f,+,\cdot)$ en $(f(A),+,\cdot)$ tal que $f = i_{f(A)} \circ \bar{f} \circ \Pi_{R_{\text{Ker } f}}$. Además, la epiyección canónica $\Pi_{R_{\text{Ker } f}}$ y la inyección canónica $i_{f(A)}$ son morfismo de anillos.

□

Del teorema anterior resulta, pues, que el anillo cociente $(A/\text{Ker } f,+,\cdot)$ es isomorfo a $(f(A),+,\cdot)$.

Cuerpos

Definición: Diremos que un anillo unitario $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo sí y sólo sí $(K-\{0\},\cdot)$ es un grupo; es decir, sí y sólo sí todo elemento de K distinto del neutro de la primera operación posee elemento inverso respecto de la segunda operación del anillo.

Diremos que un cuerpo $(K,+,\cdot)$ es conmutativo sí y sólo sí el anillo $(K,+,\cdot)$ es conmutativo.

Proposición 16

Todo cuerpo conmutativo es un dominio de integridad.

□

Proposición 17

Un anillo unitario $(A,+,\cdot)$ es un cuerpo sí y sólo sí los únicos ideales de $(A,+,\cdot)$ son $\{0\}$ y A.

□

Proposición 18

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo, entonces un ideal I del anillo es maximal sí y sólo sí $(A/I,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

□

Subcuerpos

Definición: Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, entonces diremos que un subconjunto B de K es un subcuerpo de $(K,+,\cdot)$ sí y sólo sí las restricciones de $+$ y $\cdot$ a $B \times B$ (en ese orden) dotan a B de estructura de cuerpo. En tal situación diremos, asímismo, que $(K,+,\cdot)$ es una extensión del cuerpo $(B,+,\cdot)$.

Proposición 19

La intersección de una familia arbitraria de subcuerpos de un cuerpo $(K,+,\cdot)$ es un subcuerpo de $(K,+,\cdot)$; en cambio, la reunión de una familia de subcuerpos de $(K,+,\cdot)$ no es, en general, un subcuerpo de $(K,+,\cdot)$.

□

Definición: Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, entonces a la intersección de todos los subcuerpos de $(K,+,\cdot)$ (que será un subcuerpo) la denominaremos subcuerpo primo de $(K,+,\cdot)$. Resulta, pues, que todo subcuerpo de un cuerpo contendrá al subcuerpo primo del cuerpo.

Definición: Si $(K,+,\cdot)$ y $(K',+,\cdot)$ son cuerpos, diremos que una aplicación $f \in F(K; K')$ es un morfismo de $(K,+,\cdot)$ en $(K',+,\cdot)$ sí y sólo sí es un morfismo respecto de las correspondientes estructuras de anillos subyacentes en dichos cuerpos.

Proposición 20

Todo morfismo de cuerpos o es un monomorfismo o bien es la aplicación idénticamente nula (es decir, el núcleo del morfismo coincide con su dominio).

□

Espacio vectorial sobre un cuerpo

Sea $(E,+)$ un grupo conmutativo, $(K,+,\cdot)$ un cuerpo conmutativo y consideremos una operación externa en E relativa a K (que notaremos, asímismo, por $\cdot$).

Definición: Diremos que $(E,+)$ posee estructura de espacio vectorial sobre $(K,+,\cdot)$ relativo a la operación externa $\cdot$ (o, más brevemente, E es un espacio vectorial sobre K) sí y sólo sí para cada $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in K$, $\mu \in K$ se verifica:

a) $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

b) $(\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

c) $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

d) $1 \cdot x = x$

Trivialmente, todo cuerpo conmutativo es un espacio vectorial sobre sí mismo, considerando como operación externa la segunda operación interna de la estructura de cuerpo.

Proposición 21

Si $(E,+)$ es un espacio vectorial sobre $(K,+,\cdot)$ y notamos 0_E, 0_K los elementos neutros de la suma en E y K, respectivamente,

entonces se verifica para cada $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in K$, $\mu \in K$:

a) $0_K \cdot x = 0_E$

b) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

c) $\lambda \cdot (x-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$

d) $(\lambda-\mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$

e) $\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$

f) $\lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_K \vee x = 0_E$

□

Definición: Si $(E,+)$ es un espacio vectorial sobre $(K,+,\cdot)$ diremos que un subconjunto F de E es un subespacio vectorial de E sobre K sí y sólo sí F es un subgrupo de $(E,+)$ y la restricción de la operación externa de la estructura de espacio vectorial a $K \times F$ constituye una operación externa en F relativa a K.

Considerando un cuerpo $(K,+,\cdot)$ como espacio vectorial sobre sí mismo, los únicos subespacios vectoriales que posee son $\{0\}$ y K.

Teorema de caracterización de subespacios vectoriales

Si $(E,+)$ es un espacio vectorial sobre $(K,+,\cdot)$ y F es un subconjunto no vacío de E, entonces son equivalentes las proposiciones:

a) F es un subespacio vectorial de E sobre K.

b) Para cada $x \in F$, $y \in F$, $\lambda \in K$, $\mu \in K$ se verifica:

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

□

Proposición 22

La intersección de una familia arbitraria de subespacios vectoriales de un espacio vectorial E sobre K es un subespacio vecto-

rial de E sobre K; en cambio, la reunión de una familia de subespacios vectoriales de E sobre K no es, en general, un subespacio vectorial de E sobre K.

□

Algebras

Definición: Diremos que un espacio vectorial E sobre K es un álgebra sobre K sí y sólo sí existe una segunda operación interna en E, que notaremos $\cdot$, tal que $(E,+,\cdot)$ es un anillo y para cada $\lambda \in K$, $x \in E$, $y \in E$ se verifica $\lambda\cdot(x\cdot y) = (\lambda\cdot x)\cdot y = x\cdot(\lambda\cdot y)$.

Si, además, el anillo $(E,+,\cdot)$ es unitario (respectivamente, conmutativo) diremos que el álgebra es unitaria (respectivamente, conmutativa).

Los elementos invertibles del anillo $(E,+,\cdot)$ los denominaremos elementos invertibles del álgebra E sobre K.

Trivialmente, todo cuerpo conmutativo es un álgebra unitaria y conmutativa sobre sí mismo.

Definición: Si E es un álgebra sobre K, diremos que un subconjunto F de E es una subálgebra de E sobre K sí y sólo sí F es un subespacio vectorial de E sobre K y, además, es un subanillo de $(E,+,\cdot)$ (es decir, sí y sólo sí F es un álgebra sobre K respecto de las operaciones inducidas en F por las de E).

Teorema de caracterización de subálgebras

Si E es un álgebra sobre K y F es un subconjunto no vacío de E, entonces son equivalentes las proposiciones:

a) F es una subálgebra de E sobre K.

b) Para cada $x \in F$, $y \in F$, $\lambda \in K$, $\mu \in K$ se verifica:

$$(\lambda x + \mu y \in F) \wedge (x\cdot y \in F)$$

□

§2. EL CONJUNTO Z DE LOS NUMEROS ENTEROS

Si a y b son números naturales, entonces resulta que la ecuación x+a = b carece, en general, de solución en $\mathbb{N}$ debido a que $(\mathbb{N},+)$ no es un grupo; más aún podemos precisar que las ecuaciones del tipo anterior poseen solución en $\mathbb{N}$ sí y sólo sí $a \leq b$. A continuación vamos a "extender" $\mathbb{N}$, en el sentido de que podamos sumergir $\mathbb{N}$ en el nuevo conjunto, respetando las correspondientes estructuras algebráicas, de tal forma que en ese nuevo conjunto todas las ecuaciones del tipo anterior, posean solución.

Resolveremos esta cuestión en forma general, partiendo de un semigrupo unitario conmutativo (A,+) en el que cada elemento sea regular, demostrando la existencia de una "extensión" de (A,+), única salvo isomorfismos de grupos, verificando las condiciones anteriormente requeridas.

Definición: Si (A,*) es un semigrupo y R es una relación de equivalencia en A, entonces diremos que R es compatible con * sí y sólo sí, para cada $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $y_1 \in A$, $y_2 \in A$ se verifica

$$[(x_1,x_2) \in R \wedge (y_1,y_2) \in R] \Rightarrow [(x_1 * y_1,\ x_2 * y_2) \in R]$$

Definición: Si (A,*) es un semigrupo conmutativo, en el que cada elemento es regular, diremos que (B,⊥,f) es un grupo de cocientes de (A,*) sí y sólo sí:

a) (B,⊥) es un grupo conmutativo;
b) f es un monomorfismo de (A,*) en (B,⊥);
c) para cada grupo (C,&) y para cada monomorfismo g de (A,*) en (C,&), existe un único monomorfismo h de (B,⊥) en (C,&) tal que $g = h \circ f$.

Notación: Indicaremos por + una operación interna arbitraria en un conjunto A, respecto de la cual notaremos por el símbolo 0 el elemento neutro de la operación, y para cada elemento x del conjun

to indicaremos su elemento inverso, respecto de $+$, por $-x$.

Teorema 1

Si $(A,+)$ es un semigrupo unitario en el que cada elemento es regular, entonces existe, salvo isomorfismos de grupos, un único grupo de cocientes $(G_A,+,f)$ de $(A,+)$.

Demostración:

Definimos en $A \times A$ la operación interna

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2)$$

Trivialmente, $(A \times A,+)$ es un semigrupo unitario conmutativo, en el que cada elemento es regular.

Consideremos en $A \times A$ la relación R definida así:

$$(x_1,x_2)\ R\ (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1+y_2 = x_2+y_1$$

Se comprueba, sin dificultad, que R es una relación de equivalencia en $A \times A$. Notaremos $G_A = A \times A/R$.

Lema 1: R es compatible con $+$ en A.
En efecto: si $(x_1,x_2)\ R\ (x_1',x_2')$ e $(y_1,y_2)\ R\ (y_1',y_2')$, entonces se verificará $x_1+x_2' = x_2+x_1'$ e $y_1+y_2' = y_2+y_1'$. Sumando miembro a miembro ambas igualdades deduciremos

$$x_1+x_2'+y_1+y_2' = x_2+x_1'+y_2+y_1' ,$$

es decir,

$$(x_1+y_1,x_2+y_2)\ R\ (x_1'+y_1',x_2'+y_2').$$

Definimos en G_A la operación interna $+$ así: si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in G_A$ e $y = \overline{(y_1,y_2)} \in G_A$, entonces

$$x+y = \overline{(x_1+y_1,\ x_2+y_2)} \in G_A.$$

De la compatibilidad de R con + en A, deducimos que la anterior definición es independiente de los representantes considerados de cada una de las clases de equivalencia.

Lema 2: $(G_A,+)$ es un grupo conmutativo.

En efecto:

a) + es asociativa en G_A, ya que si

$$x = \overline{(x_1,x_2)} \in G_A \qquad y = \overline{(y_1,y_2)} \in G_A \qquad z = \overline{(z_1,z_2)} \in G_A ,$$

entonces resultará

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= \overline{(x_1+y_1,x_2+y_2)} + \overline{(z_1,z_2)} = \overline{((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2)} = \\ &= \overline{(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2))} = \overline{(x_1,x_2)} + \overline{(y_1+z_1,y_2+z_2)} = \\ &= x + (y+z).\end{aligned}$$

b) + es conmutativa en G_A, ya que si

$$x = \overline{(x_1,x_2)} \in G_A \wedge y = \overline{(y_1,y_2)} \in G_A,$$

entonces resultará

$$x+y = \overline{(x_1+y_1,x_2+y_2)} = \overline{(y_1+x_1,y_2+x_2)} = y+x$$

c) + posee la propiedad de existencia de elemento neutro en G_A, ya que si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in G_A$, entonces se verifica

$$\overline{(x_1,x_2)} + \overline{(0,0)} = \overline{(x_1+0,x_2+0)} = \overline{(x_1,x_2)} = \overline{(0,0)} + \overline{(x_1,x_2)}.$$

d) + posee la propiedad de existencia de elemento inverso en G_A, ya que si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in G_A$, entonces el elemento $y = \overline{(x_2,x_1)} \in G_A$ verifica

$$x+y = \overline{(x_1+x_2,x_2+x_1)} = \overline{(0,0)} = y+x$$

Notemos por f la aplicación de A en G_A definida por $f(x) = \overline{(x,0)}$ $(\forall x \in A)$. Puesto que $f(x) = f(y) \Rightarrow \overline{(x,0)} = \overline{(y,0)} \Rightarrow x+0 = 0+y \Rightarrow x=y$, y $f(x)+f(y) = \overline{(x,0)}+\overline{(y,0)} = \overline{(x+y,0)} = f(x+y)$, deducimos que f es un monomorfismo de $(A,+)$ en $(G_A,+)$. Dicho monomorfismo nos permite sumergir $(A,+)$ en $(G_A,+)$, identificando cada elemento x de A con su imagen $f(x)$. Tal identificación, que respe

ta las correspondientes estructuras algebraicas de A y de G_A, nos permite considerar A como "subconjunto" de G_A.

Lema 3: $(G_A,+,f)$ es un grupo de cocientes de $(A,+)$.

En efecto: sea $(B,+)$ un grupo y g un monomorfismo de $(A,+)$ en $(B,+)$.

Teniendo presente que

$$\overline{(x_1,x_2)} = \overline{(y_1,y_2)} \Rightarrow x_1+y_2 = x_2+y_1 \Rightarrow g(x_1)+g(y_2) = g(x_2)+g(y_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x_1)-g(x_2) = g(y_1)-g(y_2),$$

definimos una aplicación h de G_A en B así: $h(\overline{x_1,x_2}) = g(x_1)-g(x_2)$ $(\forall(\overline{x_1,x_2})\in G_A)$. Ahora bien, h es un monomorfismo de $(G_A,+)$ en $(B,+)$ ya que

a) $$h[(\overline{x_1,x_2})+(\overline{y_1,y_2})] = h(\overline{x_1+y_1,x_2+y_2}) = g(x_1+y_1)-g(x_2+y_2) =$$
$$= g(x_1)-g(x_2)+g(y_1)-g(y_2) = h(\overline{x_1,x_2})+h(\overline{y_1,y_2}).$$

b) $$h(\overline{x_1,x_2}) = h(\overline{y_1,y_2}) \Rightarrow g(x_1)-g(x_2) = g(y_1)-g(y_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x_1+y_2) = g(x_2+y_1) \Rightarrow x_1+y_2 = x_2+y_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\overline{x_1,x_2}) = (\overline{y_1,y_2}).$$

Por otra parte, para cada $x\in A$ obtenemos

$$(h\circ f)(x) = h[f(x)] = h(\overline{x,0}) = g(x)-g(0) = g(x),$$

por tanto $h\circ f = g$.

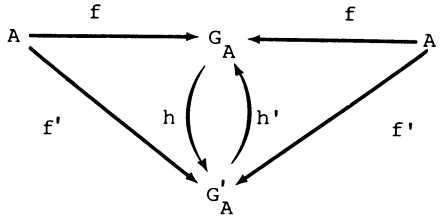
Falta ver la unicidad del monomorfismo h.

Supongamos que h' es un monomorfismo de $(A,+)$ en $(G_A,+)$ tal que $h'\circ f = g$. En tal situación para cada $x_1\in A$, $x_2\in A$ se verificará:

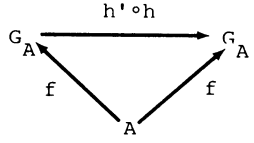
$$h'(\overline{x_1,x_2}) = h'[(\overline{x_1,0})+(\overline{0,x_2})] = h'[f(x_1)-f(x_2)] =$$
$$= h'[f(x_1)]-h'[f(x_2)] = g(x_1)-g(x_2) = h(\overline{x_1,x_2})$$

y por tanto $h' = h$. Es decir, $(G_A,+,f)$ es un grupo de cociente de $(A,+)$.

Para completar la demostración del teorema, hemos de probar que si $(G'_A,+,f')$ es un grupo de cocientes de $(A,+)$, entonces $(G'_A,+)$ es isomorfo a $(G_A,+)$. En tal situación, existirán únicos monomorfismos h de $(G_A,+)$ en $(G'_A,+)$ y h' de $(G'_A,+)$ en $(G_A,+)$ tales que $h\circ f=f'$ y $h'\circ f'=f$.



de donde obtenemos que $h' \circ h$ es un monomorfismo de $(G_A,+)$ en $(G_A,+)$ tal que $(h' \circ h) \circ f = f$



Luego, puesto que $(G_A,+,f)$ es un grupo de cocientes de $(A,+)$, deducimos $h' \circ h = I_{G_A}$. Es decir, h' y, por tanto, también h es un isomorfismo.

Conclusión: $(G_A,+)$ es isomorfo a $(G'_A,+)$.

□

Obsérvese que si a y b son elementos del conjunto G_A, entonces todas las ecuaciones del tipo $x+a = b$ tienen solución en G_A, debido a que $(G_A,+)$ es un grupo conmutativo.

Definición: El grupo cociente de $(\mathbf{N},+)$ (siendo $+$ la operación suma en $\mathbf{N}$ introducida en el capítulo IV; §3) lo denominaremos grupo aditivo de los números enteros, y lo notaremos por $(Z,+,f)$.

A los elementos de Z los denominaremos números enteros.

Operación producto en Z.

Proposición 1

Si $(\overline{x_1,x_2}) \in Z$, $(\overline{x'_1,x'_2}) \in Z$, $(\overline{y_1,y_2}) \in Z$, $(\overline{y'_1,y'_2}) \in Z$ son tales

que $\overline{(x_1,x_2)} = \overline{(x'_1,x'_2)}$ e $\overline{(y_1,y_2)} = \overline{(y'_1,y'_2)}$, entonces se verifica:

$$\overline{(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)} = \overline{(x'_1y'_1+x'_2y'_2,x'_1y'_2+x'_2y'_1)}$$

Demostración:

Puesto que $x_1+x'_2 = x_2+x'_1$ e $y_1+y'_2 = y_2+y'_1$ resulta

$$x_1y_1+x'_2y_1 = x_2y_1+x'_1y_1 \wedge x'_1y_1+x'_1y'_2 = x'_1y_2+x'_1y'_1$$

Sumando miembro a miembro dichas expresiones obtenemos

$$x_1y_1+x'_2y_1+x'_1y_1+x'_1y'_2 = x_2y_1+x'_1y_1+x'_1y_2+x'_1y'_1$$

Simplificando por x'_1y_1 resultará

$$x_1y_1+x'_2y_1+x'_1y'_2 = x_2y_1+x'_1y_2+x'_1y'_1$$

Ahora bien, teniendo presente que $x'_2y_1+x'_2y'_2 = x'_2y_2+x'_2y'_1$ deduciremos $x_1y_1+x'_1y'_2+x'_2y_2+x'_2y'_1 = x_2y_1+x'_1y'_1+x'_1y_2+x'_2y'_2$ y puesto que $x_1y_2+x'_2y_2 = x_2y_2+x'_1y_2$ concluimos finalmente

$$x_1y_1+x'_1y'_2+x'_2y'_1+x_2y_2+x'_1y_2 = x_2y_1+x'_1y'_1+x'_1y_2+x'_2y'_2+x_1y_2.$$

Es decir, $x_1y_1+x'_1y'_2+x'_2y'_1+x_2y_2 = x_2y_1+x'_1y'_1+x'_2y'_2+x_1y_2$. Por tanto

$$\overline{(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)} = \overline{(x'_1y'_1+x'_2y'_2\ ,\ x'_1y'_2+x'_2y'_1)}$$

□

Definición: Si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in Z$ e $y = \overline{(y_1,y_2)} \in Z$ definimos el producto de los números enteros x e y, que notaremos $x \cdot y$, así

$$x \cdot y = \overline{(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)} \in Z$$

La proposición anterior nos permite asegurar que el producto de números enteros así definido, es independiente de los representantes considerados de dichos números enteros.

Trivialmente, el producto de números enteros define una operación interna en Z.

Proposición 2

$(Z,+,\cdot)$ es un anillo unitario conmutativo.

Demostración:

a) $\cdot$ es asociativo en Z, ya que si $x=\overline{(x_1,x_2)}\in Z \wedge y=\overline{(y_1,y_2)}\in Z \wedge z=\overline{(z_1,z_2)}\in Z$, entonces se verifica

$$(x\cdot y)\cdot z = \overline{(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)}\cdot\overline{(z_1,z_2)} =$$

$$= (x_1y_1z_1+x_2y_2z_1+x_1y_2z_2+x_2y_1z_2,x_1y_1z_2+x_2y_2z_2+x_1y_2z_1+x_2y_1z_1)$$

$$= (x_1(y_1z_1+y_2z_2)+x_2(y_2z_1+y_1z_2),x_1(y_1z_2+y_2z_1)+x_2(y_2z_2+y_1z_1))$$

$$= \overline{(x_1,x_2)}\cdot\overline{(y_1z_1+y_2z_2,y_1z_2+y_2z_1)} = x\cdot(y\cdot z)$$

b) $\cdot$ es conmutativo en Z, ya que si $x=\overline{(x_1,x_2)}\in Z \wedge y=\overline{(y_1,y_2)}\in Z$, entonces se verifica

$$x\cdot y = \overline{(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)} = \overline{(y_1x_1+y_2x_2,y_1x_2+y_2x_1)} = y\cdot x$$

C) $\cdot$ posee la propiedad de existencia de elemento neutro en Z, ya que si $x = \overline{(x_1,x_2)}\in Z$ entonces

$$\overline{(x_1,x_2)}\cdot\overline{(1,0)} = \overline{(x_1,x_2)} = \overline{(1,0)}\cdot\overline{(x_1,x_2)}$$

d) $\cdot$ es distributivo respecto de + en Z, ya que si $x=\overline{(x_1,x_2)}\in Z \wedge y=\overline{(y_1,y_2)}\in Z \wedge z=\overline{(z_1,z_2)}\in Z$, entonces se verifica:

$$x\cdot(y+z) = \overline{(x_1,x_2)}\cdot\overline{(y_1+z_1,y_2+z_2)} =$$

$$= \overline{(x_1y_1+x_1z_1+x_2y_2+x_2z_2,x_1y_2+x_1z_2+x_2y_1+x_2z_1)} =$$

$$= \overline{(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)} + \overline{(x_1z_1+x_2z_2,x_1z_2+x_2z_1)} =$$

$$= x\cdot y + x\cdot z$$

Y teniendo presente que $(Z,+)$ es un grupo conmutativo concluimos que $(Z,+,\cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo.

□

Proposición 3

$(Z,+,\cdot)$ es un dominio de integridad y, además, no es cuerpo.

Demostración:

Puesto que $(Z,+,\cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo, hemos de probar que $(Z,+,\cdot)$ carece de divisores de cero; en efecto, si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in Z$, $y = \overline{(y_1,y_2)} \in Z$ son tales que $\overline{(x_1,x_2)} \neq \overline{(0,0)}$ y $\overline{(x_1,x_2)} \cdot \overline{(y_1,y_2)} = \overline{(0,0)}$, entonces obtenemos $x_1 \neq x_2 \wedge x_1y_1+x_2y_2 = x_1y_2+x_2y_1$. Si suponemos que $x_1 < x_2$ (en caso contrario, sigue un razonamiento análogo) existirá $a \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que $x_2 = x_1+a$, luego $x_2y_2 = x_1y_2+ay_2$. Por tanto

$$x_1y_1 + x_2y_2 = x_1y_1 + x_1y_2 + ay_2 = x_1y_2 + x_2y_1,$$

de donde resulta

$$x_1y_1 + ay_2 = x_2y_1.$$

Ahora bien, puesto que de $x_2 = x_1+a$ obtenemos $x_2y_1 = x_1y_1+ay_1$, deducimos finalmente

$$x_1y_1 + ay_2 = x_1y_1 + ay_1.$$

En consecuencia $ay_2 = ay_1$, y teniendo presente que $a \in \mathbb{N}-\{0\}$ resultará $y_2=y_1$; es decir $\overline{(y_1,y_2)} = \overline{(0,0)}$.

Conclusión: $(Z,+,\cdot)$ carece de divisores de cero.

Finalmente, $(Z,+,\cdot)$ no es un cuerpo ya que si $x = \overline{(2,0)} \in Z$ e $y = \overline{(y_1,y_2)} \in Z$ fuera un número entero tal que $x \cdot y = \overline{(1,0)}$ resultaría $\overline{(2y_1,2y_2)} = \overline{(1,0)}$, es decir $2y_1 = 1+2y_2$: lo que es una contradicción. Por tanto, existen elementos de Z, distintos del neutro de la suma, que carecen de inverso respecto del producto.

□

Forma canónica de un número entero

Definición: Un par ordenado $(x_1,x_2)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ diremos que es distinguido sí y sólo sí $(x_1=0)\vee(x_2=0)$.

Proposición 4

Si $(x_1,x_2)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $(y_1,y_2)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ son pares ordenados distinguidos y distintos, entonces

$$\overline{(x_1,x_2)} \neq \overline{(y_1,y_2)}$$

Demostración:

Distinqamos cuatro casos:

a) $(x_1=0)\wedge(y_1=0)$

en tal situación $(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2) \Rightarrow x_2\neq y_2 \Rightarrow x_1+y_2\neq x_2+y_1$

b) $(x_2=0)\wedge(y_2=0)$

Análogo al caso anterior.

c) $(x_1=0)\wedge(y_2=0)$

en tal situación $0=x_1+y_2\neq x_2+y_1$, ya que si $x_2+y_1=0$ resultaría $x_2=y_1=0$ y, por tanto, $(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$.

d) $(x_2=0)\wedge(y_1=0)$

Análogo al caso anterior.

□

Proposición 5

En cada número entero $x=\overline{(x_1,x_2)}\in Z$ existe un representante de la clase de equivalencia, y sólo uno, que es distinguido.

Demostración:

Si $x_1=x_2$ entonces un representante distinguido de $x=\overline{(x_1,x_2)}\in Z$ es $(0,0)$.

Si $x_1 > x_2$ entonces un representante distinguido de $x = \overline{(x_1,x_2)} \in Z$ es $(p,0)$, siendo p el número natural mayor que cero tal que $x_1 = x_2+p$.

Si $x_1 < x_2$ entonces un representante distinguido de $x = \overline{(x_1,x_2)} \in Z$ es $(0,p)$, siendo p el número natural mayor que cero tal que $x_1+p = x_2$.

La unicidad del tal representante distinguido es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

□

Definición: Si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in Z$ entonces el representante distinguido de la clase de equivalencia que determina el número entero x, lo denominaremos forma canónica de x.

Definición: Diremos que un número entero es positivo sí y sólo sí su forma canónica es del tipo $(x,0)$, en cuyo caso notaremos dicho número entero por $+x$.

Diremos que un número entero es negativo sí y sólo sí su forma canónica es del tipo $(0,x)$, en cuyo caso notaremos dicho número entero por $-x$.

Notaremos, asímismo, $+0 = -0 = 0$

$Z^+ = \{x: x \in Z \wedge x \text{ es positivo}\}$ $\quad Z^- = \{x: x \in Z \wedge x \text{ es negativo}\}$

Si x es un número entero positivo (respectivamente, negativo) y distinto de cero, entonces diremos que x es estrictamente positivo (respectivamente, estrictamente negativo).

Es interesante observar, que $-x$ es el elemento inverso de $+x$ respecto de la suma (lo que justifica la nomenclatura), que $Z^- = \{x: x \in Z \wedge -x \in Z^+\}$ y que se verifican, obviamente, las relaciones siguientes:

a) $(+x) + (+y) = + (x+y)$

b) $(-x) + (-y) = - (x+y)$

c) $(+x) \cdot (+y) = (-x)\cdot(-y) = + (x\cdot y)$

d) $(+x) \cdot (-y) = (-x)\cdot(+y) = - (x\cdot y)$

Teniendo presente que $(Z,+,f)$ es el grupo de cocientes de $(\mathbb{N},+)$ resulta que el monomorfismo f de $(\mathbb{N},+)$ en $(Z,+)$ está definido por

$$f(x) = \overline{(x,0)} = +x \qquad (\forall x \in \mathbb{N}),$$

de donde obtenemos: $f(x\cdot y) = +(x\cdot y) = (+x)\cdot(+y) = f(x)\cdot f(y)$. Es decir, f es un monomorfismo de $(\mathbb{N},\cdot)$ en $(Z,\cdot)$ y, por tanto, la inmersión de $\mathbb{N}$ en Z respeta, asímismo, las estructuras algebraicas relativas a los correspondientes productos.

Ordenación usual de Z

Proposición 6

a) $(\forall x)(\forall y)\ (x \in Z^+ \wedge y \in Z^+ \Rightarrow x+y \in Z^+ \wedge x\cdot y \in Z^+)$

b) $Z^+ \cap Z^- = \{0\}$

c) $Z^+ \cup Z^- = Z$

Demostración:

Basta tener presente que si un número entero es positivo y negativo, entonces su forma canónica es $(0,0)$ y, además, puesto que todo número entero posee forma canónica, será positivo o negativo.

□

Obsérvese que los conjuntos Z^+ y Z^- son equipotentes a $\mathbb{N}$, por tanto el conjunto Z de los números enteros es infinito numerable.

Proposición 7

Si definimos en Z la relación $\leq$ así

$$x \leq y \Leftrightarrow y + (-x) \in Z^+ ,$$

entonces $(Z, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Demostración:

La reflexividad de $\leq$ en Z resulta de que $0 \in Z^+$.

La antisimetría de $\leq$ en Z resulta de que $Z^+ \cap Z^- = \{0\}$.

La transitividad de $\leq$ en Z resulta de que la suma de dos números enteros positivos es un número entero positivo.

La propiedad conexa de la relación $\leq$ en Z resulta de que $Z^+ \cup Z^- = Z$.

□

De la definición anterior resulta inmediatamente que la ordenación $\leq$ (denominada, ordenación usual de Z) induce en $\mathbb{N}$, la ordenación usual de $\mathbb{N}$. Además, puesto que el monomorfismo f de $(\mathbb{N},+)$ en $(Z,+)$ verifica $f(\mathbb{N}) = Z^+$ resultará que f es un morfismo de orden inyectivo de $(\mathbb{N},\leq)$ en $(Z,\leq)$, respecto de las correspondientes ordenaciones usuales.

Proposición 8

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in Z \wedge y \in Z \wedge z \in Z^+ \wedge x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$$

Demostración:

Si x e y son números enteros tales que $x \leq y$, entonces $y - x \in Z^+$ y, por tanto, para cada número entero positivo z se verificará $(y-x) \cdot z \in Z^+$, es decir $y \cdot z - x \cdot z \in Z^+$.

□

Proposición 9 (de Arquímedes)

Si $x \in Z$ e $y \in Z^+ - \{0\}$ entonces existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n \cdot y$.

Demostración:

Si $x \in Z^-$ la proposición es inmediata, pues basta tomar $n=1$.

Si $x \in Z^+$ basta tener presente la inmersión de $\mathbf{N}$ en Z por la que tenemos identificado $\mathbf{N}$ a Z^+, y la propiedad de Arquímedes que verifica el conjunto $\mathbf{N}$.

□

Proposición 10 (División euclídea en Z)

Si $a \in Z^+ - \{0\}$ y $b \in Z$, entonces existen números enteros q y r, únicos, tales que

$$0 \leq r < a \qquad y \qquad b = a \cdot q + r$$

Demostración:

Si $b \in Z^+$ entonces basta tener presente la inmersión de $\mathbf{N}$ en Z y la división euclídea en $\mathbf{N}$.

Si $b \in Z^- - \{0\}$ entonces $-b \in Z^+ - \{0\}$, por tanto de la división euclídea en $\mathbf{N}$ deducimos la existencia de números enteros positivos únicos q' y r' tales que

$$0 \leq r' < a \qquad y \qquad -b = a \cdot q' + r'$$

Distingamos dos casos:

a) $r' = 0$: bastaría tomar $q = -q'$ y $r = r'$.

b) $r' > 0$: entonces, observando que $a \cdot (q'+1) > -b \geq a \cdot q'$ bastaría considerar $q = -(q'+1)$ y $r = b - a \cdot q$.

La unicidad de los elementos q y r es obvia.

□

Definición: Si $a \in Z^+ - \{0\}$ y $b \in Z$, entonces los números enteros q y r, verificando $0 \leq r < a$ y $b = a \cdot q + r$ (unívocamente determinados por la proposición anterior) los denominaremos, respectivamente, cociente y resto de la división euclídea del número entero b por el número entero estrictamente positivo a. Además, el número b se de-

nomina dividendo y el número a divisor, de la división euclídea de b por a.

Definición: Diremos que un número entero x es par (respectivamente, impar) sí y sólo sí existe $y \in Z$ tal que $x = 2 \cdot y$ (respectivamente, $x = 2 \cdot y + 1$).

De la proposición anterior deducimos que si $x \in Z$, entonces existen números enteros q y r tales que $0 \leq r < 2$ y $x = 2 \cdot q + r$. Por tanto, o bien $r = 1$ en cuyo caso x es un número entero impar, o bien $r = 0$ en cuyo caso x es un número entero par.

Así pues, todo número entero o bien es par o bien es impar; pero, obviamente, no puede ser par e impar simultáneamente.

Es interesante tener presente que la inmersión de $\mathbb{N}$ en Z respeta la "paridad", en el sentido de que un número natural posee la misma paridad, considerado como natural, que considerado como entero.

Característica de un anillo unitario

Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo unitario y consideremos la aplicación $f \in F(Z;A)$ definida por:

$$f(0) = 0; \quad f(n) = n \cdot 1 \quad (\forall n \in Z^{+} - \{0\}); \quad f(n) = -f(-n) \quad (\forall n \in Z^{-} - \{0\});$$

trivialmente, f es un morfismo de anillos.

Si f es un monomorfismo entonces diremos que el anillo $(A,+,\cdot)$ es de característica cero, y se verificará

$$(\forall n) \ (n \in Z \ \wedge \ n \cdot 1 = 0 \ \Rightarrow \ n = 0)$$

Si f no es un monomorfismo de anillos, el conjunto

$$\{n: \ n\in\mathbb{N}-\{0\}\wedge n\cdot 1=0\}$$

será no vacío. Si notamos

$$p = \min \{n: n\in\mathbb{N}-\{0\}\wedge n\cdot 1=0\}$$

entonces diremos que el anillo $(A,+,\cdot)$ es de característica p.

Subcuerpo primo de un cuerpo

Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y notemos para cada $x\in K$, $n\in Z^{-}-\{0\}$

$$n\cdot x = -[(-n)x]$$

Proposición 11

Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, entonces el subcuerpo primo de $(K,+,\cdot)$ es el conjunto

$$P_k = \{x: \ (x\in K) \wedge (\exists m)(\exists n)(m\in Z \wedge n\in Z \wedge n\cdot 1\neq 0 \wedge x=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1})\}$$

Demostración:

Basta tener presente que P_K es un subcuerpo de $(K,+,\cdot)$, como se comprueba sin dificultad, y que si K' es un subcuerpo de $(K,+,\cdot)$ resulta que $1\in K'$ y, por tanto, $P_K\subset K'$.

□

§3. EL CUERPO Q DE LOS NUMEROS RACIONALES

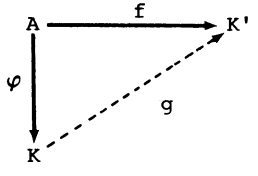
Si $a\in Z-\{0\}$ y $b\in Z$, entonces la ecuación $x\cdot a = b$ carece, en general, de solución en Z, debido a que $(Z-\{0\},\cdot)$ no es un grupo. El objetivo del presente parágrafo es introducir el cuerpo

$(Q,+,\cdot)$ de los números racionales que "extiende" a $(Z,+,\cdot)$, en el sentido de que podemos sumergir Z en Q, respetando las respectivas estructuras algebraicas, y de tal forma que en Q son resolubles todas las ecuaciones del tipo anterior.

Cuerpo de fracciones de un dominio de integridad

En todo lo que sigue, y aunque no lo explicitemos, todos los dominios de integridad considerados serán no triviales, es decir tales que $1 \neq 0$.

Definición: Sea $(A,+,\cdot)$ un dominio de integridad, $(K,+,\cdot)$ un cuerpo conmutativo y φ un morfismo inyectivo del anillo $(A,+,\cdot)$ en el cuerpo $(K,+,\cdot)$. En tal situación, diremos que el par ordenado (K,φ) es un cuerpo de cocientes o de fracciones de $(A,+,\cdot)$ sí y sólo sí para cada cuerpo conmutativo $(K',+,\cdot)$ y para cada morfismo inyectivo f de $(A,+,\cdot)$ en $(K',+,\cdot)$, existe un único morfismo inyectivo g de $(K,+,\cdot)$ en $(K',+,\cdot)$, tal que $f = g \circ \varphi$; es decir, que hace conmutativo el diagrama



Pretendemos, a continuación, demostrar que todo dominio de integridad posee, salvo isomorfismos de cuerpos, un único cuerpo de fracciones. Para ello vamos, previamente, a analizar unas cuestiones.

Proposición 1

Sea $(A,+,\cdot)$ un dominio de integridad y R la relación definida en $A \times (A-\{0\})$ así: si $(x_1,x_2) \in A \times (A-\{0\})$ e $(y_1,y_2) \in A \times (A-\{0\})$, entonces

$$[(x_1,x_2)\ R\ (y_1,y_2)] \Leftrightarrow [x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1]$$

En tal situación, R es una relación de equivalencia en $A\times(A-\{0\})$.

Demostración:

Trivialmente, R es reflexiva; por otra parte, si

$$(x_1,x_2)\ R\ (y_1,y_2)$$

entonces

$$x_1\cdot y_2 = x_2\cdot y_1\ ,$$

de donde resulta

$$y_1\cdot x_2 = y_2\cdot x_1\ ,$$

luego

$$(y_1,y_2)\ R\ (x_1,x_2).$$

Es decir, R es simétrica.

Finalmente, si

$$[(x_1,x_2)\ R\ (y_1,y_2)]\ \wedge\ [(y_1,y_2)\ R\ (z_1,z_2)]$$

entonces

$$x_1\cdot y_2 = x_2\cdot y_1 \quad \wedge \quad y_1\cdot z_2 = y_2\cdot z_1\ ,$$

es decir,

$$x_1\cdot y_2\cdot z_2 = x_2\cdot y_1\cdot z_2 = x_2\cdot y_2\cdot z_1\ .$$

Puesto que $(A,+,\cdot)$ es un dominio de integridad e $y_2\in A-\{0\}$ concluimos $x_1\cdot z_2 = x_2\cdot z_1$ y, por tanto $(x_1,x_2)\ R\ (z_1,z_2)$; luego R es transitiva. □

Si $(A,+,\cdot)$ es un dominio de integridad y R es la relación de equivalencia considerada en la proposición anterior, notaremos $K_A = A\times(A-\{0\})/R$. Pretendemos dotar a K_A de estructura de cuerpo; para ello definimos dos operaciones internas, que notaremos $+$ y $\cdot$, en K_A así: si $x = \overline{(x_1,x_2)}\in K_A$ e $y = \overline{(y_1,y_2)}\in K_A$, entonces

$$x+y = \overline{(x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1,\ x_2\cdot y_2)}\in K_A$$

$$x\cdot y = \overline{(x_1\cdot y_1,\ x_2\cdot y_2)}\in K_A$$

Puesto que hemos definido la suma y el producto de clases de equivalencia mediante representantes de dichas clases, tendremos que justificar la independencia de dichas definiciones de los representantes considerados; ello es consecuencia, inmediata, de la siguiente proposición:

Proposición 2

Sean $(x_1,x_2) \wedge (x_1',x_2') \wedge (y_1,y_2) \wedge (y_1',y_2')$ elementos de $A\times(A-\{0\})$ tales que $(x_1,x_2)\ R\ (x_1',x_2')$ e $(y_1,y_2)\ R\ (y_1',y_2')$. En tal situación se verifica:

a) $(x_1y_2+x_2y_1,\ x_2y_2)\ R\ (x_1'y_2'+x_2'y_1',x_2'y_2')$
b) $(x_1y_1,\ x_2y_2)\ R\ (x_1'y_1',\ x_2'y_2')$

Demostración:

Puesto que $(x_1,x_2)\ R\ (x_1',x_2')$ e $(y_1,y_2)\ R\ (y_1',y_2')$ se verificará $x_1x_2' = x_2x_1'$ e $y_1y_2' = y_2y_1'$; por tanto

$$x_1x_2'y_2y_2' = x_2x_1'y_2y_2' \quad \text{y} \quad x_2x_2'y_1y_2' = x_2x_2'y_2y_1'.$$

Sumando miembro a miembro obtenemos,

$$x_1x_2'y_2y_2' + x_2x_2'y_1y_2' = x_2x_1'y_2y_2' + x_2x_2'y_2y_1'$$

es decir,

$$(x_1y_2+x_2y_1,\ x_2y_2)\ R\ (x_1'y_2'+x_2'y_1',\ x_2'y_2').$$

Por otra parte,

$$x_1x_2'y_1y_2' = x_2x_1'y_1y_2' = x_2x_1'y_2y_1'$$

luego

$$(x_1y_1,x_2y_2)\ \ R\ \ (x_1'y_1',x_2'y_2'),$$

lo que completa la demostración de la proposición.

□

Proposición 3

Si $(A,+,\cdot)$ es un dominio de integridad, entonces $(K_A,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

Demostración:

a) + y · son asociativas en K_A; en efecto, sean $x = \overline{(x_1,x_2)} \in K_A$ $y = \overline{(y_1,y_2)} \in K_A$, $z = \overline{(z_1,z_2)} \in K_A$. En tal situación se verifica

$$(x+y)+z = \overline{(x_1y_2+x_2y_1,\ x_2y_2)} + \overline{(z_1,z_2)} =$$

$$= \overline{(x_1y_2z_2+x_2y_1z_2+x_2y_2z_1,\ x_2y_2z_2)} =$$

$$= \overline{(x_1y_2z_2+x_2(y_1z_2+y_2z_1),\ x_2y_2z_2)} =$$

$$= \overline{(x_1,x_2)} + \overline{(y_1z_2+y_2z_1,\ y_2z_2)} = x + (y+z) .$$

$$(x\cdot y)\cdot z = \overline{(x_1y_1,x_2y_2)}\cdot\overline{(z_1,z_2)} = \overline{((x_1y_1)z_1,\ (x_2y_2)z_2)} =$$

$$= \overline{(x_1(y_1z_1),\ x_2(y_2z_2))} = \overline{(x_1,x_2)}\cdot\overline{(y_1z_1,y_2z_2)} =$$

$$= x\cdot(y\cdot z).$$

b) + y · son conmutativas en K_A; en efecto, si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in K_A$ e $y = \overline{(y_1,y_2)} \in K_A$, entonces se verifica

$$x+y = \overline{(x_1y_2+x_2y_1,\ x_2y_2)} = \overline{(y_1x_2+y_2x_1,\ y_2x_2)} = y+x$$

$$x\cdot y = \overline{(x_1y_1,x_2y_2)} = \overline{(y_1x_1,y_2x_2)} = y\cdot x$$

c) + y · poseen la propiedad de existencia de elemento neutro en K_A; en efecto, si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in K_A$ entonces se verifica

$$\overline{(x_1,x_2)} + \overline{(0,1)} = \overline{(x_1,x_2)} = \overline{(0,1)} + \overline{(x_1,x_2)}$$

$$\overline{(x_1,x_2)} \cdot \overline{(1,1)} = \overline{(x_1,x_2)} = \overline{(1,1)} \cdot \overline{(x_1,x_2)}$$

d) + posee la propiedad de existencia de elemento inverso en K_A; en efecto, si $x = \overline{(x_1,x_2)} \in K_A$ e $y = \overline{(-x_1,x_2)} \in K_A$, entonces se verifica

$$x+y = \overline{(x_1x_2+x_2(-x_1),x_2x_2)} = \overline{(0,x_2x_2)} = \overline{(0,1)}$$

e) $\cdot$ es distributivo respecto de $+$ en K_A; en efecto, si $x = (\overline{x_1,x_2}) \in K_A \wedge y = (\overline{y_1,y_2}) \in K_A \wedge z = (\overline{z_1,z_2}) \in K_A$, entonces se verifica

$$x\cdot(y+z) = (\overline{x_1,x_2})\cdot(\overline{y_1z_2+y_2z_1,\ y_2z_2}) = (\overline{x_1y_1z_2+x_1y_2z_1,\ x_2y_2z_2}) =$$

$$= (\overline{x_1y_1,x_2y_2}) + (\overline{x_1z_1,x_2z_2}) = x\cdot y + x\cdot z.$$

f) Todo elemento de $K_A-\{(\overline{0,1})\}$ posee elemento inverso respecto del producto; en efecto, si $x = (\overline{x_1,x_2}) \in K_A-\{(\overline{0,1})\}$ entonces $(\overline{x_1,x_2}) \neq (\overline{0,1})$ luego $x_1 \neq 0$, de donde resulta que $(\overline{x_2,x_1}) \in K_A$ y, por tanto,

$$(\overline{x_1,x_2})\cdot(\overline{x_2,x_1}) = (\overline{x_1\cdot x_2,\ x_2\cdot x_1}) = (\overline{1,1})$$

ya que $x_1 \in A-\{0\}$ y $x_2 \in A-\{0\}$. Es decir, si $(\overline{x_1,x_2}) \in K_A-\{(\overline{0,1})\}$ entonces su elemento inverso respecto del producto es

$$(\overline{x_2,x_1}) \in K_A-\{(\overline{0,1})\}$$

Conclusión: $(K_A,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

□

Teorema 1

Si $(A,+,\cdot)$ es un dominio de integridad, entonces, salvo isomorfismos de cuerpos, existe un único cuerpo de fracciones de $(A,+,\cdot)$.

Demostración:

Sea R la relación de equivalencia en $A\times(A-\{0\})$ considerada en la proposición 1. Sea $K_A = A\times(A-\{0\})/R$, al que hemos dotado de estructura de cuerpo conmutativo en la proposición anterior. Consideremos la aplicación φ de A en K_A definida por $\varphi(x) = (\overline{x,1})$ $(\forall x \in A)$. Veamos que φ es un morfismo inyectivo de $(A,+,\cdot)$ en $(K,+,\cdot)$; en efecto, si $x \in A$ e $y \in A$ se verifica

a) $\varphi(x+y) = \overline{(x+y,1)} = \overline{(x\cdot 1+1\cdot y,\ 1.1)} = \overline{(x,1)} + \overline{(y,1)} = \varphi(x) + \varphi(y)$

b) $\varphi(x\cdot y) = \overline{(x\cdot y,1)} = \overline{(x,1)}\cdot\overline{(y,1)} = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$.

c) $\varphi(x) = \overline{(0,1)} \Leftrightarrow \overline{(x,1)} = \overline{(0,1)} \Leftrightarrow x = 0$

Así pues, φ es un morfismo inyectivo de $(A,+,\cdot)$ en $(K,+,\cdot)$, lo que nos permitirá sumergir $(A,+,\cdot)$ en $(K,+,\cdot)$, identificando cada elemento de A con su imagen por tal morfismo.

A continuación, queremos probar que (K_A,φ) es un cuerpo de fracciones del dominio de integridad; en efecto, sea $(K',+,\cdot)$ un cuerpo conmutativo, f un morfismo inyectivo de $(A,+,\cdot)$ en $(K',+,\cdot)$ y definamos la aplicación g de K_A en K' así:

$$g(\overline{x_1,x_2}) = f(x_1)\cdot[f(x_2)]^{-1} \qquad \forall(\overline{x_1,x_2}) \in K_A ,$$

donde $[f(x_2)]^{-1}$ representa el elemento inverso respecto del producto de $f(x_2)$ en K' (obsérvese que $x_2 \in A-\{0\}$, luego $f(x_2) \in K'-\{0\}$).

Puesto que la anterior definición de g está expresada en función de los representantes de las clases de equivalencia, hemos de demostrar la independencia de g, respecto de dichos representantes. En efecto, sean $(x_1,x_2) \in A\times(A-\{0\})$ e $(y_1,y_2) \in A\times(A-\{0\})$ tales que $(x_1,x_2)\ R\ (y_1,y_2)$. En tal situación se verifica $x_1\cdot y_2 = x_2\cdot y_1$, luego $f(x_1)f(y_2) = f(x_2)\cdot f(y_1)$; y teniendo presente que al ser f un morfismo inyectivo resulta $f(y_2) \in K'-\{0\}$ y $f(x_2) \in K'-\{0\}$, deducimos finalmente que $f(x_1)[f(x_2)]^{-1} = f(y_1)[f(y_2)]^{-1}$. Por tanto, la aplicación g está bien definida.

Lema: g es el único morfismo inyectivo de

$$(K_A,+,\cdot) \quad \text{en} \quad (K',+,\cdot)$$

tal que $f = g\circ\varphi$.

En efecto: si $(\overline{x_1,x_2}) \in K_A$ e $(\overline{y_1,y_2}) \in K_A$, entonces se verifica:

a) $g[(\overline{x_1,x_2})+(\overline{y_1,y_2})] = g(\overline{x_1y_2+x_2y_1,\ x_2y_2}) =$

$= f(x_1y_2+x_2y_1)\cdot[f(x_2y_2)]^{-1} =$

$= [f(x_1)\cdot f(y_2)+f(x_2)\cdot f(y_1)]\cdot[f(x_2)]^{-1}\cdot[f(y_2)]^{-1} =$

$= f(x_1)\cdot[f(x_2)]^{-1} + f(y_1)\cdot[f(y_2)]^{-1} =$

$= g(\overline{x_1,x_2}) + g(\overline{y_1,y_2})$

b) $g[(\overline{x_1,x_2})\cdot(\overline{y_1,y_2})] = g(\overline{x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2}) =$

$= f(x_1\cdot y_1)\cdot[f(x_2\cdot y_2)]^{-1} =$

$= f(x_1)\cdot f(y_1)\cdot[f(x_2)]^{-1}\cdot[f(y_2)]^{-1} =$

$= g(\overline{x_1,x_2})\cdot g(\overline{y_1,y_2})$.

c) $g(\overline{x_1,x_2}) = 0 \Leftrightarrow f(x_1)\cdot[f(x_2)]^{-1} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 0 \Leftrightarrow (\overline{x_1,x_2}) = (\overline{0,1})$

d) $(\forall x)(x\in A \Rightarrow (g\circ\varphi)(x) = g[\varphi(x)] = g(\overline{x,1}) =$

$= f(x)\cdot[f(1)]^{-1} = f(x))$

Hemos probado que g es un morfismo inyectivo de $(K_A,+,\cdot)$ en $(K',+,\cdot)$ tal que $f = g\circ\varphi$; veamos que es único: en efecto, si h fuese otro tal morfismo inyectivo, entonces para cada $(\overline{x_1,x_2}) \in$ $\in K_A$ se verificará

$h(\overline{x_1,x_2}) = h[(\overline{x_1,1})\cdot(\overline{1,x_2})] = h[(\overline{x_1,1})\cdot((\overline{x_2,1}))^{-1}] =$

$= h[\varphi(x_1)\cdot(\varphi(x_2))^{-1}] = h[\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2^{-1})] =$

$= h[\varphi(x_1)]\cdot h[\varphi(x_2^{-1})] = f(x_1)\cdot f(x_2^{-1}) =$

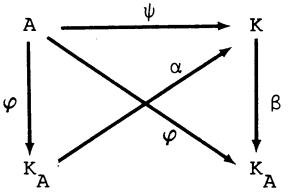
$= f(x_1)\cdot[f(x_2)]^{-1} = g(\overline{x_1,x_2})$.

lo que demuestra el lema.

Así pues, hemos probado que el par ordenado (K_A,φ) es un cuerpo de cocientes o fracciones del dominio de integridad $(A,+,\cdot)$. La demostración del teorema quedará completada estableciendo la unici--

dad, salvo isomorfismos de cuerpos, del tal cuerpo de fracciones.

Supongamos que (K,ψ) es un cuerpo de fracciones de $(A,+,\cdot)$. Puesto que $(K_A,+,\cdot)$ y $(K,+,\cdot)$ son cuerpos conmutativos, deducimos la existencia de dos únicos morfismos inyectivos α y β, de $(K_A,+,\cdot)$ en $(K,+,\cdot)$ y de $(K,+,\cdot)$ en $(K_A,+,\cdot)$, respectivamente, tales que $\psi = \alpha\circ\varphi$ y $\varphi = \beta\circ\psi$; es decir, que hacen conmutativo el siguiente diagrama



Por tanto $\beta\circ\alpha = I_{K_A}$, luego β (y en consecuencia también α) son isomorfismos.

Conclusión: los cuerpos $(K_A,+,\cdot)$ y $(K,+,\cdot)$ son isomorfos.

□

En resumen, acabamos de demostrar que cada dominio de integridad posee, salvo isomorfismos de cuerpos, un único cuerpo de fracciones en el que puede sumergirse; ello nos permitirá, con frecuencia, hablar del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad. Más aún, si (K_A,φ) es el cuerpo de fracciones de $(A,+,\cdot)$ diremos, más brevemente, que K_A (o bien $(K_A,+,\cdot)$) es el cuerpo de fracciones de $(A,+,\cdot)$, sin necesidad de explicitar el morfismo inyectivo φ que define dicho cuerpo de fracciones.

El cuerpo Q de los números racionales

Puesto que $(Z,+,\cdot)$ es un dominio de integridad no trivial, el teorema anterior nos permite considerar su cuerpo de fracciones

(K_Z,φ), siendo φ el morfismo inyectivo de $(Z,+,\cdot)$ en $(K_Z,+,\cdot)$ definido por $\varphi(x) = \overline{(x,1)}$ $(\forall x \in Z)$.

Definición: El cuerpo conmutativo $(K_Z,+,\cdot)$ lo denominaremos cuerpo de los números racionales, y lo notaremos por $(Q,+,\cdot)$.

Resulta pues, que (Q,φ) es el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $(Z,+,\cdot)$.

Los elementos de Q se denominan números racionales.

Notación: si $\overline{(x_1,x_2)} \in Q$, entonces suele utilizarse la notación $\frac{x_1}{x_2}$ para indicar dicha clase de equivalencia, es decir, dicho número racional. Así, la suma y producto de números racionales podemos expresarla

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1}{x_2 \cdot y_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 \cdot y_1}{x_2 \cdot y_2}$$

Proposición 4

Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo de característica cero, entonces el subcuerpo primo de $(K,+,\cdot)$ es isomorfo a $(Q,+,\cdot)$.

Demostración:

Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo de característica cero, entonces la aplicación $f \in F(Z;K)$ definida por:

$$f(0) = 0 \wedge f(n) = n \cdot 1 \quad (\forall n \in Z^+ - \{0\}) \wedge f(n) = -f(-n) \quad (\forall n \in Z^- - \{0\})$$

es un monomorfismo de anillos. Por tanto, teniendo presente que $(Q,+,\cdot)$ es el cuerpo de fracciones de $(Z,+,\cdot)$ deducimos la existencia de un único monomorfismo de anillos g de $(Q,+,\cdot)$ en $(K,+,\cdot)$ tal que

$f = g \circ i$, siendo i la inyección canónica de Z en Q. Ahora bien, del teorema 1 resulta para cada $m/n \in Q$

$$g(\frac{m}{n}) = f(m) \cdot [f(n)]^{-1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1}$$

luego de la proposición 11 del parágrafo anterior concluimos que el subcuerpo primo de $(K,+,\cdot)$ es isomorfo a $(Q,+,\cdot)$.

□

PROBLEMAS

1.- Sea A un conjunto; demostrar que
   a) $(P(A), \cap)$ es un semigrupo unitario y conmutativo.
   b) $(P(A), \cup)$ es un semigrupo unitario y conmutativo.
   c) $(P(A), \cap, \cup)$ es un semianillo unitario y conmutativo.
   d) $(P(A), \cup, \cap)$ es un semianillo unitario y conmutativo.
   e) $(\mathcal{F}(A\times A), \circ)$ es un semigrupo unitario, en general, no conmutativo.
   f) Si notamos $\mathcal{B}(A) = \{f: f\in\mathcal{F}(A;A) \wedge f \text{ es biyectiva}\}$ entonces $(\mathcal{B}(A), \circ)$ es un grupo, en general, no conmutativo.
   g) Si notamos $B\Delta C = (B-C)\cup(C-B)$, para cada $B\in P(A)$, $C\in P(A)$, entonces $(P(A), \Delta, \cap)$ es un anillo unitario y conmutativo. ¿Es cuerpo?.

2.- Sea A un conjunto no vacío y $(K,+,\cdot)$ un cuerpo conmutativo. Definimos en $\mathcal{F}(A;K)$ las siguientes operaciones: para cada $f\in\mathcal{F}(A;K)$, $g\in\mathcal{F}(A;K)$, $\lambda\in K$
   i) $f+g$ es la aplicación de A en K definida así: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $(\forall x\in A)$.
   ii) $f\cdot g$ es la aplicación de A en K definida así: $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ $(\forall x\in A)$.
   iii) $\lambda\cdot f$ es la aplicación de A en K definida así: $(\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot f(x)$.
   a) Demostrar que $(\mathcal{F}(A;K),+,\cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo que no es, en general, cuerpo.
   b) Demostrar que $(\mathcal{F}(A;K),+)$ es un álgebra unitaria y conmutativa sobre $(K,+,\cdot)$, respecto de las operaciones anteriormente consideradas.

3.- Si $(A,+,\cdot)$ es un dominio de integridad tal que A es finito, demostrar que $(A,+,\cdot)$ es un cuerpo.
Indicación: Si $a\in A-\{0\}$, considérese la aplicación $f_a\in\mathcal{F}(A;A)$ definida por $f_a(x) = x\cdot a$ $(\forall x\in A)$. La aplicación f_a es biyectiva.

4.- Demostrar que $(Z,+,\cdot)$ es un anillo principal.
Indicación: Si $I\neq\{0\}$ es un ideal de $(Z,+,\cdot)$, considérese $a = \min\{x: x\in I\cap(Z^+-\{0\})\}$ y demostrar que $I = (a)$.

5.- Demostrar que si $f\in\mathcal{F}(Z;Z)$ es un morfismo de $(Z,+,\cdot)$ en $(Z,+,\cdot)$ entonces o bien $\operatorname{Ker} f = Z$, o bien $f = I_Z$.

6.- Demostrar que si f es un orden isomorfismo de $(Z,\leq)$ en $(Z,\leq)$, entonces se verifica
a) $(\forall n)(n\in Z \Rightarrow f(n) = f(0)+n)$.
b) $(\exists a)(a\in Z \wedge (\forall n)(n\in Z \Rightarrow f(n) = a+n))$.
Indicación: a) Demuéstrese la relación para elementos de Z^+ aplicando el teorema de inducción completa.

7.- Sea $(A,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado tal que
i) $A \neq \emptyset$ y A es numerable.
ii) $(A,\leq)$ carece de elemento mínimo y de elemento máximo.
iii) Toda cortadura de $(A,\leq)$ determina salto.
Demostrar que $(A,\leq)$ es orden isomorfo a $(Z,\leq)$.
Indicación: Si $a\in A$, considérese $A_1 = [a,\rightarrow[$, $A_2 =]\leftarrow,a[$, y pruébese que $(A_1,\leq)$ y $(A_2,\geq)$ son orden isomorfos a $(\mathbb{N},\leq)$.

8.- En el conjunto
$Z[x] = \{f: (f\in F(\mathbb{N};Z)) \wedge (\exists n)(n\in\mathbb{N} \wedge (\forall m)(m\in\mathbb{N} \wedge m > n \Rightarrow f(m)=0))\}$
definimos dos operaciones internas (suma y producto) así: para cada $f\in Z[x]$, $g\in Z[x]$
i) $f+g$ es la aplicación de $\mathbb{N}$ en Z definida por
$(f+g)(p) = f(p)+g(p)$ $(\forall p\in\mathbb{N})$
ii) $f\cdot g$ es la aplicación de $\mathbb{N}$ en Z definida por
$(f\cdot g)(p) = f(p)\cdot g(p)$ $(\forall p\in\mathbb{N})$.
Para cada $f\in Z[x]$, notemos
$$n_f = \min\{n: (n\in\mathbb{N}) \wedge (\forall m)(m\in\mathbb{N} \wedge m > n \Rightarrow f(m)=0)\}$$
a) Demostrar que $(Z[x],+,\cdot)$ es un dominio de integridad.
b) Demostrar que $Z[x]$ es un conjunto infinito y numerable.
Indicación: b) Para cada $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ considérese el conjunto

$$A_{(m,n)} = \{f: f\in Z[x] \wedge n_f=m \wedge \sum_{k=1}^{n_f} |f(k)| = n\}.$$

Probar que $A_{(m,n)}$ es finito y que

$$Z[x] = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A_{(m,n)}.$$

9.- Demostrar que el conjunto Q es infinito y numerable.
Indicación: Si φ es una función de elección del conjunto $Z\times(Z-\{0\})$ considérese la aplicación $\psi\in F(Q;Z\times(Z-\{0\}))$ definida por $\psi[(m,n)] = \varphi[(m,n)]$.

10.- Demostrar que $A = \{x: x \in Q^+ \wedge x^2 \leq 2\}$ es un subconjunto no vacío acotado superiormente en $(Q, \leq)$ y que carece de supremo en $(Q, \leq)$.
Indicación: Probar que si $\alpha \in Q$ fuese el supremo de A entonces verificaría $\alpha^2 = 2$.

8

CUERPOS ORDENADOS

§1. CUERPOS ORDENADOS

Grupos y anillos ordenados

Definición: Si G es un conjunto, $+$ es una operación interna en G y $\leq$ es una relación de orden parcial (respectivamente, total) en G, entonces diremos que la terna ordenada $(G,+,\leq)$ es un **grupo ordenado** (respectivamente, grupo totalmente ordenado) sí y sólo sí:

a) $(G,+)$ es un grupo.

b) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in G \wedge y\in G \wedge z\in G \wedge x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z \wedge z+x\leq z+y)$

Proposición 1

Si $(G,+)$ es un grupo, entonces son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) Existe una relación de orden parcial $\leq$ en G tal que $(G,+,\leq)$ es un grupo ordenado.

b) Existe un subconjunto P de G tal que, si notamos $-P =$

$= \{x: (x \in G) \wedge (-x \in P)\}$ y $P+P = \{x: (\exists y)(\exists z)(y \in P \wedge z \in P \wedge x=y+z)\}$ entonces se verifica

$$0 \in P \wedge P+P \subset P \wedge P \cap (-P) = \{0\}$$

Demostración:

a) $\Rightarrow$b): En efecto, si $(G,+,\leq)$ es un grupo ordenado, consideremos $P = \{x: x \in G \wedge 0 \leq x\}$. Trivialmente, $0 \in P$; si $x \in P$ e $y \in P$, entonces $0 \leq x \Rightarrow y \leq x+y$, por tanto $0 \leq y \leq x+y$, es decir $x+y \in P$.
Por otra parte, si $x \in P \cap (-P)$ entonces $0 \leq x \wedge 0 \leq -x$ de donde resulta $0 \leq x \wedge 0+x \leq -x+x$, por tanto $x=0$.

b) $\Rightarrow$a): En efecto, si existe un tal subconjunto P, entonces la relación $\leq$ definida en G así $x \leq y \Leftrightarrow y-x \in P$ $(\forall x \in G \wedge \forall y \in G)$ es de orden parcial: la reflexividad es consecuencia de que $0 \in P$, la antisimetría es consecuencia de que $P \cap (-P) = \{0\}$ y la transitividad es consecuencia de que $P+P \subset P$. Además, si $x \in G$, $y \in G$, $z \in G$ son tales que $x \leq y$, entonces se verifica $y-x \in P$, luego $(y+z)-(x+z) \in P$ y $(z+y)-(z+x) \in P$, es decir, $x+z \leq y+z$ y $z+x \leq z+y$.

□

Corolario

Si $(G,+)$ es un grupo, entonces son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) Existe una relación de orden total $\leq$ en G tal que $(G,+,\leq)$ es un grupo totalmente ordenado.

b) Existe un subconjunto P de G tal que, si notamos $-P = \{x: (x \in G) \wedge (-x \in P)\}$ y $P+P = \{x: (\exists y)(\exists z)(y \in P \wedge z \in P \wedge x=y+z)\}$ entonces se verifica

$$0 \in P \wedge P+P \subset P \wedge P \cap (-P) = \{0\} \wedge P \cup (-P) = G$$

En efecto: basta aplicar la proposición anterior y tener presente que la relación $\leq$ asociada a P es conexa sí y sólo sí $P \cup (-P) = G$.

Definición: Si $(G,+)$ es un grupo y $\leq$ es una relación de orden parcial en G, entonces al conjunto $G^+ = \{x: x\in G \wedge 0\leq x\}$ lo denominaremos cono positivo de $\leq$ en $(G,+)$; los elementos de G^+ (respectivamente, de $G^+ - \{0\}$) diremos que son los positivos (respectivamente, estrictamente positivos) de la ordenación $\leq$ en $(G,+)$. Asimismo, notaremos $G^- = \{x: (x\in G) \wedge (-x\in G^+)\}$, cuyos elementos (respectivamente, los del conjunto $G^- - \{0\}$) los denominaremos negativos (respectivamente, estrictamente negativos) de la ordenación $\leq$ en $(G,+)$.

Definición: Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo (supondremos siempre, aunque no lo explicitemos, que $1\neq 0$) y $\leq$ es una relación de orden parcial (respectivamente, de orden total) en A, diremos que la cuaterna ordenada $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo ordenado (respectivamente, totalmente ordenado) sí y sólo sí:

a) $(A,+,\leq)$ es un grupo ordenado (respectivamente, totalmente ordenado).
b) $(\forall x)(\forall y)(x\in A^+ \wedge y\in A^+ \Rightarrow x\cdot y \in A^+)$

Ejemplo: El anillo de los números enteros es totalmente ordenado como anillo, respecto de la ordenación usual, como consecuencia de la proposición 7 del capítulo VII (§2) y de que el producto de números enteros positivos es un entero positivo.

Obsévese que los números enteros positivos (respectivamente, negativos) son los elementos positivos (respectivamente, negativos) de la ordenación usual en $(Z,+)$.

Proposición 2

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo, entonces son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) Existe una relación de orden parcial $\leq$ en A tal que $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo ordenado.
b) Existe un subconjunto P de A tal que, si notamos $-P =$

$= \{x: (x \in A) \wedge (-x \in P)\}$; $P+P = \{x: (\exists y)(\exists z)(y \in P \wedge z \in P \wedge x=y+z)\}$y $P \cdot P = \{x: (\exists y)(\exists z)(y \in P \wedge z \in P \wedge x=y \cdot z)\}$, entonces se verifica

$$0 \in P \wedge P \cap (-P) = \{0\} \wedge P+P \subset P \wedge P \cdot P \subset P$$

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la caracterización de grupos ordenados y de la definición de anillos ordenados.

□

Corolario

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo, entonces son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) Existe una relación de orden total $\leq$ en A tal que $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo totalmente ordenado.

b) Existe un subconjunto P de A tal que, si notamos $-P = \{x: (x \in A) \wedge (-x \in P)\}$; $P+P = \{x: (\exists y)(\exists z)(y \in P \wedge z \in P \wedge x=y+z)\}$ y $P \cdot P = \{x: (\exists y)(\exists z)(y \in P \wedge z \in P \wedge x=y \cdot z)\}$, entonces se verifica:

$0 \in P \wedge P \cap (-P) = \{0\} \wedge P+P \subset P \wedge P \cdot P \subset P \wedge P \cup (-P) = A$

En efecto: basta aplicar la proposición anterior y tener presente que la relación $\leq$ asociada a P es conexa sí y sólo sí $P \cup (-P) = A$.

□

Propiedades inmediatas de los anillos ordenados

Si $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo ordenado, se verifican las siguientes propiedades:

1.- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A^+ \wedge x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$

2.- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A^- \wedge x \leq y \Rightarrow y \cdot z \leq x \cdot z)$

3.- $(\forall x)(\forall y)(x \in A^- \wedge y \in A^- \Rightarrow x \cdot y \in A^+)$

4.- $(\forall x)(\forall y)(x \in A^+ \wedge y \in A^- \Rightarrow x \cdot y \in A^-)$

5.-Si $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo totalmente ordenado, entonces

$$(\forall x)(x\in A \Rightarrow x^2=x\cdot x\in A^+)$$

6.- Si $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo unitario totalmente ordenado, entonces $1\in A^+$.

En efecto: basta tener presente que si $1\notin A^+$, entonces $1\in A^-$ y, por tanto, $1 = 1\cdot 1 \in A^+$: lo que es una contradicción.

7.- Si $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo unitario totalmente ordenado, entonces $(A,+,\cdot)$ es de característica 0.

En efecto: si $x\in A^+$ es un elemento tal que existe $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ verificando $n\cdot x = 0$, entonces resultará $(n-1)\cdot x = n\cdot x - x\in A^+$, por tanto $x=0$. A la misma conclusión llegaríamos si $x\in A^-$.

8.- Todo subanillo de $(A,+,\cdot)$ es un anillo ordenado, respecto de la ordenación inducida.

□

Es interesante observar, que en el anillo $(Z,+,\cdot)$ de los números enteros, respecto de las operaciones usuales, sólo existe <u>una</u> relación de orden total en Z (precisamente, la ordenación usual de Z) que dota a $(Z,+,\cdot,\leq)$ de estructura de anillo totalmente ordenado; ya que, respecto de una tal ordenación, $1\in Z^+$ y, por tanto, para cada $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ se verificaría $n\cdot 1\in Z^+$; es decir, el cono positivo de dicha ordenación coincidiría con el de la ordenación usual. No obstante, en $(Z,+,\cdot)$ existen distintas ordenaciones parciales que lo dotan de estructura de anillo ordenado; así, por ejemplo, la ordenación en Z cuyo cono positivo es el conjunto de los números enteros pares positivos dota, trivialmente, a $(Z,+,\cdot)$ de estructura de anillo ordenado (no totalmente).

<u>Definición</u>: Diremos que dos anillos ordenados $(A,+,\cdot,\leq)$ y $(B,+,\cdot,\leq)$ son isomorfos sí y sólo sí existe un isomorfismo f de $(A,+,\cdot)$ en $(B,+,\cdot)$, tal que f es un isomorfismo de $(A,\leq)$ en $(B,\leq)$.

En tal situación, diremos que f es un isomorfismo de anillos ordenados.

Proposición 3

Si $(A,+,\cdot,\leq)$ es un dominio de integridad no trivial y totalmente ordenado, entonces existe un subdominio de integridad de $(A,+,\cdot)$, totalmente ordenado, que es isomorfo a $(Z,+,\cdot,\leq)$.

Demostración:

La aplicación f de Z en A definida por: $f(n) = n\cdot 1$ (si $n>0$); $f(n) = -[(-n)\cdot 1]$ (si $n<0$) y $f(0) = 0$ es un morfismo de anillos. Además, si $n\in Z$, $m\in Z$ y $n<m$ se verificará $m-n>0$, por tanto $f(m-n) = (m-n)\cdot 1 > 0$, ya que $(A,+,\cdot)$ es de característica cero.

□

Cuerpos ordenados

Definición: Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo y $\leq$ es una relación de orden total en K, entonces diremos que la cuaterna ordenada $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado sí y sólo sí $(K,+,\cdot,\leq)$ es un anillo totalmente ordenado.

Así pues, todas las propiedades anteriormente enunciadas para anillos totalmente ordenados, serán válidas para cuerpos ordenados; asímismo, se verifica trivialmente:

1.- $(\forall x)(\forall y)(x\in K^+-\{0\} \wedge y\in K^+-\{0\} \Rightarrow x\cdot y\in K^+-\{0\})$
2.- $(\forall x)(x\in K^+-\{0\} \Rightarrow x^{-1}\in K^+-\{0\})$
3.- $(\forall x)(\forall y)(x\in K^+-\{0\} \wedge y\in K^+-\{0\} \wedge x<y \Rightarrow y^{-1}<x^{-1})$

Definición: Diremos que dos cuerpos ordenados son isomorfos sí y sólo sí son isomorfos como anillos totalmente ordenados; en tal situación, un isomorfismo de anillos totalmente ordenados lo denominaremos isomorfismo de cuerpos ordenados.

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ y $(K',+,\cdot,\leq)$ son cuerpos ordenados, entonces diremos que $(K',+,\cdot,\leq)$ es una extensión ordenada de $(K,+,\cdot,\leq)$ sí y sólo

si, K es un subcuerpo de $(K',+,\cdot)$ y la ordenación de K es la inducida por la de K'.

Proposición 4

Si $(A,+,\cdot,\leq)$ es un dominio de integridad totalmente ordenado y (K,φ) es el cuerpo de fracciones de $(A,+,\cdot)$, entonces existe una única ordenación $\leq$ en K, que extiende la ordenación de A, por la cual $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado. Además, respecto de dicha ordenación, φ es un monomorfismo de anillos totalmente ordenados.

Demostración:

Notaremos el elemento $(\overline{a,b})\in K$ por a/b, siendo $a\in A$ y $b\in A-\{0\}$.

La unicidad de la tal ordenación resulta, trivialmente, de la siguiente consideración: para que una ordenación $\leq$ en K extienda la de A, un elemento $a/b\in K$ ha de ser positivo respecto de dicha ordenación sí y sólo sí ambos elementos son positivos o negativos en la ordenación de A; pues, en efecto, si $a/b\in K^+$ y $a\in A^+$, entonces $b\in A^+$ ya que, de lo contrario, si $b\in A^-$ deduciríamos $\frac{b}{1}\in K^-$ y, por tanto, $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}\cdot\frac{a}{b}\in K^-$, de donde resultaría $a\in A^-$: análogo razonamiento en los restantes casos.

Todo se reduce, pues, a demostrar que el conjunto

$$P=\{\frac{a}{b}:[\frac{a}{b}\in K]\wedge[(a\in A^+\wedge b\in A^+-\{0\})\vee(a\in A^-\wedge b\in A^--\{0\})]\}$$

verifica las propiedades que permite dotar a $(K,+,\cdot)$ de estructura de cuerpo ordenado.

a) Si $a/b\in P$ y $c/d\in P$, entonces $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\in P$ y $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\in P$, como se comprueba sin dificultad, en los distintos casos que pueden presentarse.

b) Si notamos $-P=\{x:(x\in K)\wedge(-x\in P)\}$, entonces $P\cup(-P)=K$, consecuencia de la definición de P y de que $(A,+,\cdot,\leq)$ es un anillo totalmente ordenado.

•

c) Si $x \in K^+ \cap K^-$ entonces $x = \frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$, siendo $a/b \in K^+$ y $c/d \in K^+$ por tanto $a \cdot d + b \cdot c = 0$.
Puesto que a y b poseen el mismo signo y los elementos c, d poseen el mismo signo, deducimos que $a \cdot d$ y $b \cdot c$ son del mismo signo luego, de la relación $a \cdot d + b \cdot c = 0$ concluimos $a = c = 0$, ya que $b > 0$ y $d > 0$.

Finalmente, que φ sea un morfismo inyectivo de anillos totalmento ordenados, es consecuencia de que para cada $x \in A^+ - \{0\}$ se verifica $\varphi(x) = x/1 \in P - \{0\}$.

□

Corolario

El cuerpo $(Q,+,\cdot)$ de los números racionales, respecto de las operaciones usuales, sólo admite una estructura de cuerpo ordenado.

En efecto: basta tener presente que $(Q,+,\cdot)$ es el cuerpo de fracciones de $(Z,+,\cdot)$ y que $(Z,+,\cdot)$ sólo admite una estructura de dominio de integridad totalmente ordenado.

□

Es interesante observar que todo cuerpo ordenado, al ser de característica cero, contiene un subcuerpo isomorfo, como cuerpo a $(Q,+,\cdot)$, luego inducirá en éste la única ordenación que lo dota de estructura de cuerpo ordenado. Por tanto, todo cuerpo ordenado es isomorfo, como cuerpo ordenado, a una extensión ordenada de $(Q,+,\cdot,\leq)$; más aún, podemos precisar que si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces la aplicación g de Q en K definida por $g(m/n) = f(m) \cdot [f(n)]^{-1}$, siendo f la aplicación considerada en la proposición 3, es un monomorfismo de cuerpos ordenados, como puede comprobarse sin dificultad.

En adelante, identificaremos $(Q,+,\cdot,\leq)$ con un subcuerpo ordenado de un cuerpo ordenado arbitrario a través de dicha aplicación g;

lo cual nos permitirá considerar a $\mathbb{Q}$ y, por tanto, a $\mathbb{N}$ y a $\mathbb{Z}$, como subconjuntos de cualquier cuerpo ordenado.

Nota: La única ordenación $\leq$ que dota a $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ de estructura de cuerpo ordenado la denominaremos ordenación usual de $\mathbb{Q}$.

Proposición 5

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces el conjunto totalmente ordenado $(K,\leq)$ es denso.

Demostración:

Supongamos lo contrario es decir, que existiera una cortadura (A,B) de $(K,\leq)$ que determina salto; si notamos $a = \text{máx } A$ y $b = \text{mín } B$ resultará que $\frac{a+b}{2} \in K \wedge \frac{a+b}{2} \in]a,b[$ lo que, obviamente, es una contradicción.

□

En la proposición 3 (cap. II; §2; pág. 107) habíamos obtenido una caracterización del supremo de un subconjunto de un conjunto totalmente ordenado. Vamos a ver, a continuación, cómo se traduce dicha caracterización en los cuerpos ordenados, a partir de los elementos estrictamente positivos del cuerpo.

Proposición 6

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, $A \subset K$ y $x \in K$, entonces se verifica

$$[\, x=\sup A\,] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a)\ x \text{ es cota superior de } A \text{ en } (K,\leq) \\ b)\ (\forall \varepsilon)\,(\varepsilon \in K^{+}-\{0\} \Rightarrow (\exists y)(y \in A \wedge x-\varepsilon < y \leq x)) \end{array}\right]$$

Demostración:

Si $x=\sup A$ entonces x es cota superior de A en $(K,\leq)$ y, además, para cada $\varepsilon \in K^{+}-\{0\}$ se verifica $x-\varepsilon < x$, luego de la proposición 3 (cap. II; §2; pág. 107) deducimos la existencia de un elemento $y \in A$ tal que $x-\varepsilon < y \leq x$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in K$ es un elemento verificando las condiciones a) y b) e $y \in K$ fuese una cota superior de A en $(K, \leq)$ tal que $y < x$; considerando $\varepsilon = x - y \in K^+ - \{0\}$ deduciríamos la existencia de $z \in A$ tal que $y < z \leq x$, lo que contradiría que $y \in K$ fuese cota superior de A en $(K, \leq)$.

Conclusión: $x = \sup A$.

□

Corolario

Si $(K, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado, $A \subset K$ y $x \in K$, entonces se verifica

$$[x = \text{ínf } A] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a)\ x \text{ es cota inferior de } A \text{ en } (K, \leqslant) \\ b)\ (\forall \varepsilon)(\varepsilon \in K^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists y)(y \in A \wedge x \leq y < x + \varepsilon)) \end{array}\right]$$

En efecto: basta tener presente que el ínfimo de A en $(K, \leq)$ es el supremo de A en $(K, \geq)$.

□

Valoración en un cuerpo ordenado

Definición: Si $(K, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces la aplicación f de K en K^+ definida por $f(x) = \text{máx}\{x, -x\}$, la denominaremos valoración usual del cuerpo ordenado.

Para cada $x \in K$ el elemento $f(x)$, que lo notaremos por $|x|$, recibe el nombre de valor absoluto de x. Trivialmente $(\forall x)(x \in K \Rightarrow |x| \in K^+)$.

Proposición 7

Si $(K, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces se verifican las siguientes propiedades:

a) $(\forall x)(x \in K^+ \Leftrightarrow |x| = x)$

b) $(\forall x)(x \in K^- \Leftrightarrow |x| = -x)$

c) $(\forall x)(x \in K \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|)$

d) $(\forall x)(x\in K \Rightarrow (|x|=0 \Leftrightarrow x=0))$

e) $(\forall x)(\forall y)(x\in K \wedge y\in K \Rightarrow |x\cdot y|=|x|\cdot|y|)$

f) $(\forall x)(\forall y)(x\in K \wedge y\in K \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|)$: esta propiedad se denomina "desigualdad triangular de la valoración".

g) $(\forall x)(x\in K \Rightarrow |x|=|-x|)$

h) $(\forall x)(\forall y)(x\in K \wedge y\in K \Rightarrow ||x|-|y|| \leq |x-y|)$

i) $(\forall x)(\forall y)(x\in K \wedge y\in K \Rightarrow (|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y))$

j) $(\forall x)(\forall y)(x\in K \wedge y\in K \Rightarrow (|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y))$

k) $(\forall x)(x\in K-\{0\} \Rightarrow |x^{-1}| = |x|^{-1})$

l) $(\forall x)(\forall y)(x\in K \wedge y\in K-\{0\} \Rightarrow |xy^{-1}| = |x|\cdot|y|^{-1})$

m) $(\forall x)(\forall y)(\forall \varepsilon)(x\in K \wedge y\in K \wedge \varepsilon\in K^{+}-\{0\} \Rightarrow (x\in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\Leftrightarrow |x-y| < \varepsilon))$

Demostración:

a) Si $x\in K^{+}$ entonces $-x\in K^{-}$, luego $|x| = \text{máx}\{x,-x\} = x$. Recíprocamente, si $|x| = \text{máx}\{x,-x\} = x$, entonces $x\in K^{+}$.

b) Análogo al apartado a)

c) Puesto que $x \leq |x|$ y $-x \leq |x|$ deducimos $x \leq |x|$ y $x \geq -|x|$.

d) Si $|x| = 0$ resulta $\text{máx}\{x,-x\} = 0$, por tanto $x=0$. Trivialmente, si $x=0$ entonces $|0| = \text{máx}\{0,-0\} = 0$.

e) Para la demostración de esta propiedad distingamos cuatro casos:

1.- $x\in K^{+} \wedge y\in K^{+}$; en este caso $x\cdot y\in K^{+}$, luego
$$|x\cdot y| = x\cdot y = |x|\cdot|y|.$$

2.- $x\in K^{+} \wedge y\in K^{-}$; en este caso $x\cdot y\in K^{-}$, luego
$$|x\cdot y| = -(x\cdot y) = x\cdot(-y) = |x|\cdot|y|.$$

3.- $x\in K^{-} \wedge y\in K^{+}$: análogo al caso 2.

4.- $x\in K^{-} \wedge y\in K^{-}$; en este caso $x\cdot y\in K^{+}$, luego
$$|x\cdot y| = x\cdot y = (-x)\cdot(-y) = |x|\cdot|y|$$

f) Puesto que $x \leq |x| \wedge y \leq |y|$ obtendremos $x+y \leq |x|+|y|$; por otra parte $-x \leq |x| \wedge -y \leq |y|$. Por tanto $-(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x|+|y|$.

Conclusión: $|x+y| = \text{máx}\{x+y,-(x+y)\} \leq |x|+|y|$.

g) Basta observar que $|-x| = \text{máx}\{-x,x\} = |x|$

h) Puesto que $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \wedge |y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x|$ resultará $|x| - |y| \leq |x-y| \wedge |y| - |x| \leq |x-y|$, luego $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

i) Basta tener presente que
$[\,|x| < y\,] \Leftrightarrow [\,(x<y) \wedge (-x<y)\,] \Leftrightarrow [\,(x<y) \wedge (-y<x)\,] \Leftrightarrow [\,-y<x<y\,]$

j) Análogo al apartado i).

k) Basta observar que $(\forall x)(x \in K-\{0\} \Rightarrow x \cdot x^{-1} = 1)$ y el apartado e).

l) Consecuencia inmediata de e) y k).

m) En efecto: para cada $x \in K$, $y \in K$, $\varepsilon \in K^+-\{0\}$ se verifica
$(x \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\,) \Leftrightarrow (y-\varepsilon < x < y+\varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon < x-y < +\varepsilon) \Leftrightarrow (|x-y| < \varepsilon\,)$.

□

§2: CUERPOS ORDENADOS ARQUIMEDIANOS

Definición: Diremos que un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ es arquimediano sí y sólo sí para cada $x \in K$, $y \in K^+-\{0\}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n \cdot y$.

Proposición 1

El cuerpo ordenado $(Q,+,\cdot,\leq)$ es arquimediano.

Demostración:

Para cada elemento $x/y \in Q$ podemos suponer, sin que ello implique restricción alguna, que $y \in Z^+-\{0\}$.

Sean
$$\frac{x}{y} \in Q \quad y \quad \frac{z}{t} \in Q^+-\{0\} \quad (t \in Z^+-\{0\})$$

si $\frac{x}{y} < \frac{z}{t}$ existirá $n \in \mathbb{N}$ (basta tomar n=2) tal que $\frac{x}{y} < n \cdot \frac{z}{t}$; si, en cambio, $0 < \frac{z}{t} < \frac{x}{y}$ resultará

$$(1+t^2x) \cdot \frac{z}{t} = \frac{z}{t} + \frac{t^2xz}{t} > \frac{txz}{1} \geq \frac{xt}{1} \geq \frac{x \cdot t}{y \cdot t} = \frac{x}{y}\,,$$

luego, se verificará $\frac{x}{y} < n.\frac{z}{t}$ siendo $n = 1+t^2x$.

Conclusión: $(Q,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano.

□

Teniendo presente que todo cuerpo ordenado es isomorfo, como cuerpo ordenado, a una extensión ordenada de $(Q,+,\cdot,\leq)$, deducimos que, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, $(Q,+,\cdot,\leq)$ es el menor, por la relación de inclusión, cuerpo ordenado arquimediano. En el próximo capítulo, obtendremos el mayor, por la relación de inclusión, cuerpo ordenado arquimediano que existe, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados (que es el cuerpo de los números reales).

Teorema 1

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano.

b) $\mathbb{N}$, considerado como subconjunto de K, no está acotado superiormente en $(K,\leq)$.

c) $(\forall\varepsilon)(\varepsilon\in K^+-\{0\} \Rightarrow (\exists n)(n\in\mathbb{N}-\{0\} \wedge \frac{1}{n} < \varepsilon))$

d) Q, considerado como subconjunto de K, es denso en $(K,\leq)$.

Demostración:

a) ⇒ b): Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y $x\in K$, entonces puesto que $1\in K^+-\{0\}$ existirá $n\in\mathbb{N}$ tal que $x < n\cdot 1 = n$, luego x no es cota superior de $\mathbb{N}$ en $(K,\leq)$; por tanto, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente en $(K,\leq)$.

b) ⇒ c): Si $\varepsilon \in K^+-\{0\}$ entonces $\varepsilon^{-1}\in K^+-\{0\}$ y, puesto que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente en $(K,\leq)$, existirá un elemento $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ tal que $\varepsilon^{-1} < n$, de donde resulta $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

c) ⇒ d): Sean $x\in K$ e $y\in K$ tales que $x < y$, veamos que existe un elemento $z\in Q$ tal que $x < z < y$. Para ello distinga-

mos tres casos:

1. $x < 0 < y$: basta tomar $z = 0 \in Q$.
2. $0 < x < y$: en este caso se verifica $y-x \in K^+-\{0\}$, por tanto, existirá $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que $\frac{1}{n} < y-x$.
   Consideremos el conjunto

$$A = \{ p: \ p \in \mathbb{N} \wedge y \leq p \cdot \frac{1}{n} \} \subset \mathbb{N}$$

   Observemos que $A \neq \emptyset$ ya que $y^{-1} \cdot \frac{1}{n} \in K^+-\{0\}$, luego existirá un elemento $p \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que $\frac{1}{p} < y^{-1} \cdot \frac{1}{n}$, de donde, al ser $y \in K^+-\{0\}$, resultaría $y < p \cdot \frac{1}{n}$; es decir $A \neq \emptyset$.
   Sea entonces $q = \text{mín } A$; puesto que $q \neq 0$ se verificará $(q-1) \cdot \frac{1}{n} < y$, así como

$$x = y-(y-x) < q \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{q-1}{n} .$$

   Por tanto, en este caso, bastará tomar

$$z = \frac{q-1}{n} \in Q.$$

3. $x < y < 0$: en este caso resultará $0 < -y < -x$ y, del apartado anterior, deducimos la existencia de $t \in Q$ tal que $-y < t < -x$, luego $x < -t < y$.
   En tal situación, pues, bastará considerar $z = -t$.
4. $x=0 \vee y=0$: en este caso aplíquese c) a y ó $-x$, respectivamente.

d) $\Rightarrow$ a): Si $x \in K$ e $y \in K^+-\{0\}$, hemos de probar la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n \cdot y$. Si $x \leq y$ basta tomar $n=2$; si, en cambio, se verifica $0 < y < x$, entonces $0 < y \cdot x^{-1}$. Luego, de la densidad de Q en $(K, \leq)$, deducimos la existencia de $z = \frac{m}{n} \in Q$ tal que $0 < \frac{m}{n} < y \cdot x^{-1}$. En consecuencia, al ser $m \in \mathbb{N}-\{0\}$, resulta $0 < x \leq m \cdot x = \frac{m}{n} \cdot x \cdot n < y \cdot x^{-1} \cdot x \cdot n = y \cdot n$.

□

Del teorema anterior resulta, inmediatamente, que si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano orden isomorfo al cuerpo ordenado $(K',+,\cdot,\leq)$, entonces $(K',+,\cdot,\leq)$ es arquimediano; ya que si f es un isomorfismo de $(K,+,\cdot,\leq)$ en $(K',+,\cdot,\leq)$ basta observar que $f_{|\mathbb{N}} = I_{\mathbb{N}}$ y aplicar la caracterización b) del teorema para cuerpos ordenados arquimedianos.

Proposición 2

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado tal que $(K,\leq)$ es contínuo, entonces $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano.

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir, que el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ no es arquimediano, entonces $\mathbb{N}$, considerado como subconjunto de K, estará acotado superiormente; sea $x \in K$ una cota superior de $\mathbb{N}$ en $(K,\leq)$. En tal situación, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x-n \in K$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ en $(K,\leq)$, ya que si existiera un elemento $m \in \mathbb{N}$ tal que $x-n < m$, resultaría $x < n+m$. En consecuencia, el conjunto $\mathbb{N}$ carecerá de supremo en $(K,\leq)$ y, en cambio, está acotado superiormente; lo que contradice que $(K,\leq)$ sea un conjunto contínuo.

□

Definición: Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces diremos que un elemento $x \in K$ es infinitamente grande en valor absoluto (o simplemente, infinitamente grande) sí y sólo sí $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < |x|)$; en caso contrario, diremos que el elemento x es finito. Diremos que un elemento $x \in K$ es infinitamente pequeño en valor absoluto (o infinitesimal o, simplemente, infinitamente pequeño) sí y sólo sí

$$(\forall n)\left(n \in \mathbb{N}-\{0\} \Rightarrow |x| < \frac{1}{n}\right).$$

De las anteriores definiciones resulta, inmediatamente, que el elemento inverso, respecto del producto, de un elemento infinitamente

grande es infinitamente pequeño; y que el inverso, respecto del producto, de un elemento infinitamente pequeño, distinto de cero, es infinitamente grande. Asímismo, es consecuencia inmediata que un cuerpo ordenado es arquimediano sí y sólo sí, no existen elementos del cuerpo infinitamente grandes, o equivalentemente sí y sólo sí el único elemento del cuerpo infinitamente pequeño es el cero.

Notaremos

$$K_1 = \{x: (x \in K) \wedge (x \text{ es infinitamente grande})\}$$
$$K_2 = \{x: (x \in K) \wedge (x \text{ es finito})\}$$
$$K_3 = \{x: (x \in K) \wedge (x \text{ es infinitamente pequeño})\}$$

Proposición 3

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado no arquimediano, entonces K_2 es un subanillo de $(K,+,\cdot)$ tal que $(\forall x)(x \in K-\{0\} \Rightarrow x \in K_2 \vee x^{-1} \in K_2)$.

Demostración:

Si $x \in K_2$ e $y \in K_2$, existirán $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x| \leq n_1 \wedge |y| \leq n_2 ,$$

de donde resultará

$$|x-y| \leq |x| + |y| \leq n_1+n_2 \wedge |x\cdot y| \leq n_1 \cdot n_2,$$

luego,

$$x-y \in K_2 \wedge x\cdot y \in K_2.$$

Además, si

$$x \in K-\{0\} \wedge x \notin K_2,$$

entonces

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < |x|),$$

luego

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x^{-1}| < \frac{1}{n}),$$

es decir $x^{-1} \in K_2$.

□

Proposición 4

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado no arquimediano, entonces K_3 es un ideal maximal de $(K_2,+,\cdot)$.

Demostración:

Si $x\in K_3$ e $y\in K_3$ entonces para cada $n\in\mathbb{N}^*$, se verificará, $|x|<\frac{1}{2n}$ $\wedge$ $|y|<\frac{1}{2n}$, de donde obtenemos

$$|x-y| \leq |x| + |y| < \frac{1}{n} ;$$

luego $x-y\in K_3$.

Por otra parte, si $z\in K_3$ y $t\in K_2$, sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $|t|\leq n$ (podemos suponer $n\in\mathbb{N}-\{0\}$). Entonces, para cada $m\in\mathbb{N}-\{0\}$ resultará $|z| < 1/m\cdot n$ y, por tanto, $|z\cdot t| < n \cdot \frac{1}{m\cdot n} = \frac{1}{m}$, es decir, $z\cdot t \in K_3$.

Así pues, K_3 es un ideal del anillo $(K_2,+,\cdot)$; veamos que dicho ideal es maximal: en efecto, si I es un ideal de $(K_2,+,\cdot)$ tal que $K_3 \subsetneq I$ y $x\in I-K_3$, entonces $x^{-1}\in K_2$, de donde deducimos

$$1 = x\cdot x^{-1}\in I,$$

es decir, $I = K_2$.

□

Proposición 5

El cuerpo cociente $(K_2/K_3,+,\cdot)$ posee una estructura natural de cuerpo ordenado arquimediano por la ordenación cuyo cono positivo P es el conjunto cuyos elementos son:las clases de equivalencia que poseen algún representante estrictamente positivo y la clase nula.

Demostración:

Observemos, en primer lugar, que si un representante de una clase de equivalencia no nula es estrictamente positivo, entonces todos los representantes lo son; ya que, si por el contrario existiera $\bar{x} \in K_2/K_3$ con representantes $y\in\bar{x}$, $z\in\bar{x}$ verificando $y\in K_2^+-\{0\}$, $z\in K_2^-\{0\}$, obtendríamos $y-z > y > 0$ y, puesto que $y-z\in K_3$ deduciríamos $y\in K_3$, es decir $\bar{x}=0$, que contradice lo supuesto.

Así pues, en tal situación $-P$ será el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia que poseen algún representante estrictamente negativo y la clase nula. Es inmediato comprobar que P verifica las propiedades que caracterizan la estructura de cuerpo ordenado. Finalmente, teniendo presente que para cada $x \in K_2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$, resultará $\bar{x} \leq n < n+1$ y, por tanto, $(K_2/K_3, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano.

□

Proposición 6

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces existen elementos maximales, por la relación de inclusión, en la familia de subcuerpos ordenados arquimedianos de $(K,+,\cdot,\leq)$.

Demostración:

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano la proposición es inmediata; en caso contrario, sea A el conjunto de cuerpos contenidos en K_2. Puesto que la ordenación inducida en K_2 por la de K es arquimediana, es decir

$$(\forall x)(\forall y)(x \in K_2 \wedge y \in K_2^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists n)(n \in \mathbb{N} \wedge x < n\, y))$$

resultará que todo cuerpo perteneciente a A será ordenado arquimediano. Más aún, si K' es un subcuerpo ordenado arquimediano de $(K,+,\cdot,\leq)$, entonces para cada $x \in K'$ existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$; por tanto, para cada $x \in K'$ existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x| < m$, luego $x \in K_2$, es decir A coincide con la familia de subcuerpos ordenados arquimedianos de $(K,+,\cdot,\leq)$, por la ordenación inducida.

Y puesto que A está parcialmente ordenado por la relación de inclusión, respecto de la que es un conjunto inductivo (ya que la reunión de los cuerpos de una cadena de $(A,\subset)$ es un cuerpo contenido en K_2), concluimos, del lema de Zorn, la existencia de elementos maximales de $(A,\subset)$, lo que completa la demostración.

□

§3. SUCESIONES EN UN CUERPO ORDENADO

Definición: Si K es un conjunto, entonces una sucesión de elementos de K es una aplicación f de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ en K; los elementos del conjunto imagen $f(\mathbb{N}^*)$ reciben el nombre de términos de la sucesión.

Teniendo presente que una sucesión de elementos de K es una familia de elementos de K con $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ como conjunto de índices, notaremos para cada $n \in \mathbb{N}^*$: $f(n) = x_n$ (que denominaremos, término n-ésimo de la sucesión), y la representaremos por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Nota: En la anterior definición puede utilizarse, indistintamente, el conjunto $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ o el conjunto $\mathbb{N}$; si elegimos $\mathbb{N}^*$ es, simplemente, para obtener una cierta "simetría" entre índices de la familia y términos de la sucesión; así, x_1 será el primer término de la sucesión, x_2 será el segundo término; etc.

Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo conmutativo (supondremos siempre $1 \neq 0$) y notemos por $S(K)$ al conjunto cuyos elementos son las sucesiones de elementos de K (¿porqué la clase cuyos elementos son las sucesiones de elementos de K, es un conjunto?). Definimos en $S(K)$ dos operaciones internas, a partir de las operaciones internas que dotan a K de estructura de cuerpo conmutativo, así: si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$, entonces

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} + \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cdot \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \{x_n \cdot y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Obviamente, la suma y el producto de sucesiones, anteriormente definidas, son operaciones internas en $S(K)$.

Proposición 1

$(S(K),+,\cdot)$ es un anillo unitario conmutativo que, además, no es cuerpo.

Demostración:

La demostración de las propiedades que caracterizan la estructura de anillo unitario conmutativo es inmediata, a partir de las anteriores definiciones y de que $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

El elemento neutro de $S(K)$ respecto de la suma, es la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $x_n=0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y el elemento neutro de $S(K)$ respecto del producto, es la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $x_n=1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

Puesto que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $x_1=0$ y $x_n=1$ $(\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\})$ es distinta del elemento neutro de la suma y, en cambio, carece de elemento inverso respecto del producto, resulta que el anillo unitario conmutativo $(S(K),+,\cdot)$ no es cuerpo.

□

Si definimos, para cada $\lambda\in K$ y cada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(K)$:

$$\lambda\cdot\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}=\{\lambda\cdot x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

obtenemos una operación externa en $S(K)$, a partir de K, que dota a $(S(K),+)$ de estructura de espacio vectorial sobre K, como se comprueba sin dificultad. Por tanto, teniendo presente la proposición anterior, resulta trivialmente que $S(K)$ posee estructura de álgebra unitaria y conmutativa, respecto de las operaciones anteriormente consideradas.

Definición: Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de un conjunto K es cuasi-constante sí y sólo sí existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada $m\in\mathbb{N}^*\wedge n\in\mathbb{N}^*\wedge m\geqslant n_o\wedge n\geqslant n_o$ se verifica $x_n=x_m$; es decir, sí y sólo si coinciden todos sus términos, a partir de uno en adelante.

En el caso particular $n_o=1$ diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

es constante y la notaremos por $\{x\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, siendo x el elemento de K con el que coinciden todos los términos de la sucesión.

Definición: Si $(K,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de K es creciente (respectivamente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente) sí y sólo sí, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica $x_n \leq x_{n+1}$ (respectivamente, $x_n < x_{n+1}$, $x_n \geq x_{n+1}$ o $x_n > x_{n+1}$). Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es monótona (respectivamente, estrictamente monótona) sí y sólo sí $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente o decreciente (respectivamente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente).

De las definiciones anteriores resulta, inmediatamente, las consideraciones siguientes:

a) Toda sucesión estrictamente creciente (respectivamente, estrictamente decreciente o estrictamente monótona) es creciente (respectivamente, decreciente o monótona).

b) Existen sucesiones que son, simultáneamente, creciente y decreciente concretamente, las sucesiones constantes; en cambio, una sucesión no puede ser, a la vez, estrictamente creciente y estrictamente decreciente.

c) Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de K es creciente (respectivamente, estrictamente creciente) sí y sólo sí la sucesión $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente (respectivamente, estrictamente decreciente).

Definición: Si $(K,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de K está acotada superiormente (respectivamente, acotada inferiormente) sí y sólo sí existe un elemento $x\in K$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x_n \leq x)$ (respectivamente, $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x \leq x_n)$); o dicho con otras palabras, sí y sólo sí el con-

junto cuyos elementos son los términos de la sucesión está acotado superiormente (respectivamente, inferiormente) en $(K,\leq)$.

Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada sí y sólo sí está acotada superior e inferiormente.

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de K está acotada superiormente sí y sólo sí la sucesión $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada inferiormente.

Si $(K,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces toda sucesión cuasi-constante de elementos de K está acotada.

Proposición 2

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, entonces una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de K está acotada sí y sólo sí la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada.

Demostración:

Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada, entonces existirán elementos $x\in K$ e $y\in K$ tales que $y\leq x_n\leq x$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; luego resultará $(x_n\leq x)\wedge(-x_n\leq -y)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, por tanto $|x_n| = \max\{x_n,-x_n\} \leq \leq \max\{x,-y\}\in K$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. Es decir, la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente y, puesto que está acotada inferiormente por 0, concluimos que $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada.

Recíprocamente, si la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada existirá un elemento $x\in K$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, se verifica $|x_n|\leq x$, de donde resulta $(-x\leqslant x_n\leqslant x)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada.

□

Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy en cuerpos ordenados.

Definición: Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado, diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de K converge a $x\in K$ (o bien, que x es el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $(K,+,\cdot,\leq)$ y lo notaremos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) sí y sólo sí, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq n_o$, se verifica $|x_n-x|<\varepsilon$.

Es decir:

$$[\lim_{n\to\infty} x_n = x] \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon)(\varepsilon\in K^+-\{0\}\Rightarrow(\exists n_o)(n_o\in\mathbb{N}^*\wedge(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geq n_o \Rightarrow |x_n-x|<\varepsilon)))]$$

Obsérvese que el número natural $n_o\in\mathbb{N}^*$ que aparece en la definición anterior depende de ε, por lo que deberíamos escribir $n_o(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$; no obstante, preferimos hacerlo así, a fín de no complicar excesiva e innecesariamente la notación.

Trivialmente, toda sucesión cuasi - constante es convergente y su límite es el elemento de K con el que coinciden todos los términos de la sucesión, a partir de uno en adelante.

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de elementos de K, entonces, con frecuencia, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de elementos del cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$. Notaremos por $C^*(K)$ al conjunto de sucesiones convergentes del cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$.

Definición: Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ es fundamental o de Cauchy sí y sólo sí, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geq n_o\wedge m\geq n_o$, se verifica $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

Es decir:

$$[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ es de Cauchy}] \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon)(\varepsilon\in K^+-\{0\} \Rightarrow (\exists n_o)(n_o\in\mathbb{N}^* \wedge (\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \wedge n\geq n_o \wedge m\geq n_o \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon)))]$$

Es válida , entonces, la misma consideración de antes acerca del número natural $n_o\in\mathbb{N}^*$ y a su dependencia del $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ considerado.

Trivialmente, toda sucesión cuasi - constante del cuerpo ordenado es de Cauchy.

Notaremos por $C(K)$ el conjunto de sucesiones de Cauchy del cuerpo ordenado $(K, +, \cdot, \leq)$.

Proposición 3

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ es convergente, entonces su límite es único.

Demostración:

Supongamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos del cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ converge a $x\in K$ e $y\in K$. En tal situación, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirán $n_o\in\mathbb{N}^*$ y $n_1\in\mathbb{N}^*$ tales que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geq n_o \Rightarrow |x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2}) \wedge (\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geq n_1 \Rightarrow |x_n-y|<\frac{\varepsilon}{2})$; de donde, si notamos $n_2 = \max\{n_o,n_1\}$ resultará $|x-y|\leq |x-x_{n_2}|+|x_{n_2}-y|< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Así pues, $(\forall\varepsilon)(\varepsilon\in K^+-\{0\} \Rightarrow |x-y|<\varepsilon)$, por tanto $x-y=0$ ya que, de lo contrario, bastaría considerar $\varepsilon = |x-y|/2$ para llegar a una contradicción.

□

Proposición 4

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy del cuerpo ordenado $(K, +,\cdot,\leq)$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada.

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K, en-

tonces dado $\varepsilon=1\in K^{+}-\{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^*\wedge$ $\wedge\, m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x_m|<1)$, en particular $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge$ $n\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x_{n_o}|<1)$. Por tanto, para cada natural n $(n\geqslant n_o)$ se verificará

$$|x_n| = |x_n-x_{n_o}+x_{n_o}| \leqslant |x_n-x_{n_o}|+|x_{n_o}| < 1+|x_{n_o}|$$

Si $n_o=1$ la anterior relación establecerá la acotación de $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ por tanto estará acotada la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$; si, en cambio, $n_o>1$ y notamos $M = \text{máx}\{|x_1|,\ldots,|x_{n_o-1}|\}$ y $M' = \text{máx}\{M,1+|x_{n_o}|\}$ se verificará, para cada $n\in\mathbb{N}^*$: $|x_n|\leqslant M'$, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ estará acotada.

□

Proposición 5

Toda sucesión convergente de un cuerpo ordenado es de Cauchy. Dicho con otras palabras, se verifica la inclusión: $C^*(K)\subset C(K)$.

Demostración:

Si $x\in K$ es <u>el</u> límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ del cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$, entonces para cada $\varepsilon\in K^{+}-\{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada natural n $(n\geqslant n_o)$, se verifica $|x_n-x|<\varepsilon/2$. Por tanto, si n y m son números naturales tales que $(n\geqslant n_o)\wedge(m\geqslant n_o)$ deducimos

$$|x_n-x_m| \leqslant |x_n-x|+|x-x_m| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ .$$

Es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy.

□

El recíproco de la proposición anterior es falso, es decir, en un cuerpo ordenado pueden existir sucesiones de Cauchy no convergentes; por ejemplo, en $(Q,+,\cdot,\leqslant)$ puede comprobarse, no sin dificultades operativas, que la sucesión $\left\{\sum_{k=o}^{n}\frac{1}{k!}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy, pero

no es convergente en $(Q,+,\cdot,\leqslant)$ (ver problema nº12 del presente capítulo).

Definición: Diremos que un cuerpo ordenado es completo sí y sólo sí toda sucesión de Cauchy de elementos del cuerpo es convergente.

Es decir, los cuerpos ordenados completos $(K,+,\cdot,\leqslant)$ están caracterizados por la condición $C(K) = C^*(K)$. De la observación hecha anteriormente resulta que el cuerpo ordenado de los números racionales no es completo.

Proposición 6

Si $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado completo isomorfo al cuerpo ordenado $(K',+,\cdot,\leqslant)$, entonces $(K',+,\cdot,\leqslant)$ es completo.

Demostración:

Sea f un isomorfismo del cuerpo ordenado $(K',+,\cdot,\leqslant)$ en $(K,+,\cdot,\leqslant)$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de Cauchy de elementos de K'. Veamos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K; en efecto, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ se verifica $f^{-1}(\varepsilon)\in (K')^+-\{0\}$, luego existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x_m|<f^{-1}(\varepsilon))$$

de donde resulta

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon)$$

Sea pues $y=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$; notemos x al elemento de K' tal que $f(x)=y$. Veamos que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$; en efecto, para cada $\varepsilon\in(K')^+-\{0\}$ se verifica $f(\varepsilon)\in K^+-\{0\}$, luego existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow |f(x_n)-y|<f(\varepsilon)),$$

de donde resulta

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x|<\varepsilon)$$

y por tanto, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

□

Proposición 7

Si $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(K)$ es convergente a cero e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(K)$ es una sucesión acotada, entonces la sucesión $\{x_n\cdot y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero.

Demostración:

Puesto que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(K)$ está acotada, existirá $A\in K^+-\{0\}$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow|y_n|\leqslant A)$; por tanto, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow|x_n|<\varepsilon\cdot A^{-1})$, de donde, para cada $n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o$, resultará

$$|x_n\cdot y_n| = |x_n|\cdot|y_n| < \varepsilon\cdot A^{-1}\cdot A = \varepsilon .$$

Es decir, la sucesión $\{x_n\cdot y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a 0.

□

Proposición 8

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ convergente a $x\in K$, entonces la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $|x|\in K$.

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(K)$ converge a $x\in K$, entonces para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow|x_n-x|<\varepsilon),$$

y, puesto que $||x_n|-|x||\leqslant|x_n-x|$, concluimos

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow||x_n|-|x||<\varepsilon),$$

luego, la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $|x|$.

□

El recíproco de la proposición anterior es falso. En efecto, en $(Q,+,\cdot,\leqslant)$ la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(Q)$, siendo $x_n=1$ si n es

par y $x_n=-1$ si n es impar, no es de Cauchy luego no será convergente y, en cambio, la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, al ser constante, es convergente.

□

A continuación, vamos a estudiar el comportamiento de las sucesiones convergentes de un cuerpo ordenado ante las desigualdades.

Proposición 9

Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ convergentes, respectivamente, a $x\in K$ e $y\in K$. Supongamos que existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada natural n $(n\geqslant n_o)$ se verifica $x_n<y_n$ (o bien $x_n\leqslant y_n$). En tal situación: $x\leqslant y$.

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir que se verifique $y<x$ y consideremos $\varepsilon=\frac{x-y}{2}\in K^+-\{0\}$, con lo cual resultará $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap]y-\varepsilon,y+\varepsilon[=\emptyset$. Puesto que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a x existirá $n_1\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada natural n $(n\geqslant n_1)$ se verifique $|x_n-x|<\varepsilon$, es decir $x_n\in]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$. Ahora bien, teniendo presente que si $n\in\mathbb{N}^*$ $(n\geqslant n_o)$ entonces $x_n<y_n$ (o bien, $x_n\leqslant y_n$) y notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$, concluimos $y_n\notin]y-\varepsilon,y+\varepsilon[$, para cada natural $n\geqslant n_2$ Por tanto, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no sería convergente a y.

□

Proposición 10

Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ convergentes, respectivamente, a $x\in K$ e $y\in K$. Supongamos que existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada natural n $(n\geqslant n_o)$ se verifica $x_n>y_n$ (o bien $x_n\geqslant y_n$). En tal situación: $x\geqslant y$.

Demostración:

Análoga a la de la proposición anterior.

□

Proposición 11

Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ convergentes a $x\in K$. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de elementos de K tal que existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n\leqslant z_n\leqslant y_n).$$

En tal situación, la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a x.

Demostración:

Puesto que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergen a x, dado $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirán $n_1\in\mathbb{N}^*$ y $n_2\in\mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(n\geqslant n_1 \Rightarrow |x_n-x|<\varepsilon)\wedge(n\geqslant n_2\Rightarrow |y_n-x|<\varepsilon))$$

Si notamos $n_3=\{\text{máx } n_o,n_1,n_2\}$, entonces para cada número natural n $(n\geqslant n_3)$ se verificarán las relaciones $z_n-x\leqslant y_n-x<\varepsilon$ y $-\varepsilon<x_n-x\leqslant z_n-x$, por tanto $|z_n-x|<\varepsilon$ $(\forall n\geqslant n_3)$; es decir, la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a x.

□

Sucesiones parciales y valores de adherencia de una sucesión en un cuerpo ordenado

Sea $(K,+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado y $f\in F(\mathbb{N}^*;K)$ una sucesión de elementos de K; notemos $f(n)=x_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

Definición: Diremos que la aplicación $g\in F(\mathbb{N}^*,K)$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sí y sólo sí existe una aplicación $h\in F(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$, estrictamente creciente por la ordenación usual de $\mathbb{N}^*$, tal que $g=f\circ h$.

Si notamos $h(k)=n_k$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ entonces

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{N}^* & \xrightarrow{\quad h\quad} & \mathbb{N}^* & \xrightarrow{\quad f\quad} & K\\ k & \longrightarrow & h(k) & \longrightarrow & f[h(k)]=x_{n_k}\end{array}$$

luego $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ será la sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ asociada

a la aplicación estrictamente creciente h. Puesto que la aplicación identidad en $\mathbb{N}^*$ es estrictamente creciente, resulta que toda sucesión de un cuerpo ordenado es sucesión parcial de sí misma.

Obsérvese que todos los términos de una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son términos de dicha sucesión; por tanto, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente entonces toda sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite coincide con el de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$; de donde deducimos que es condición suficiente para que una sucesión sea no convergente que posea, al menos, dos sucesiones parciales convergentes, con límites distintos.

Definición: Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ y $x\in K$, entonces diremos que x es un valor de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sí y sólo sí existe una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente a x.

Observaciones:

a) Si una sucesión es convergente, entonces el límite es valor de adherencia de la sucesión (más aún: es el único valor de adherencia. ¿porqué?).

b) Una sucesión puede poseer distintos valores de adherencia (en cuyo caso, la sucesión no será convergente. ¿Por qué?): en efecto, consideremos en $(Q,+,\cdot,\leqslant)$ la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $x_n=1$ si n es par y $x_n=-1$ si n es impar; veamos que 1 y -1 son valores de adherencia de la sucesión.

Sean $f\in F(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ y $g\in F(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ definidas por $f(k) = 2k$ $(\forall\, k\in\mathbb{N}^*)$ y $g(k) = 2k-1$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$; trivialmente las sucesiones parciales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, asociadas a las aplicaciones f y g son convergentes, respectivamente, a 1 y -1. Por tanto, 1 y -1 son valores de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Una sucesión puede poseer un único valor de adherencia y, en cambio, no ser convergente: en efecto, consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida en un cuerpo ordenado arquimediano $(K,+,\cdot,\leqslant)$ así: $x_n=n$ si n es par y $x_n=1$ si n es impar. Trivialmente, el único valor

de adherencia de dicha sucesión es 1 y, en cambio, puesto que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente en K, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no estará acotada, luego no será convergente.

Pues bien, a continuación vamos a demostrar que una sucesión de Cauchy en un cuerpo ordenado no puede poseer dos valores de adherencia distintos, y en el caso que posea un valor de adherencia, dicha sucesión es convergente.

Proposición 12

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ y $x\in K$ es un valor de adherencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a $x\in K$.

Demostración:

Sea $x\in K$ un valor de adherencia de la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente a x; para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirá $k_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada natural k $(k\geq k_o)$, se verifica $|x_{n_k}-x|<\varepsilon/2$. Por otra parte, existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geq n_o\wedge m\geq n_o\Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon/2).$$

En tal situación, si $n_k\in\mathbb{N}^*$ es tal que $k\geq k_o\wedge n_k\geq n_o$, entonces para cada natural n $(n\geq n_o)$ deduciremos

$$|x_n-x|\leq |x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-x|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a x.

□

Cuerpos ordenados arquimedianos y sucesiones

Proposición 13

Un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ es arquimediano sí y sólo sí la sucesión $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a 0.

Demostración:

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano, entonces para cada $\varepsilon \in K^+-\{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $1/n_o < \varepsilon$, de donde resulta para cada natural n $(n \geq n_o)$: $1/n \leq 1/n_o < \varepsilon$; luego la sucesión $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a cero.

Recíprocamente, si la sucesión $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero, entonces para cada $\varepsilon \in K^+-\{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $1/n_o < \varepsilon$, luego el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ es arquimediano.

□

Puesto que todo cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ "contiene" como subcuerpo ordenado a $(Q,+,\cdot,\leq)$, dada una sucesión de números racionales del cuerpo será, a veces, importante explicitar respecto de qué cuerpo (Q o K) se consideran los conceptos de sucesión convergente o de Cauchy. A continuación, vamos a demostrar que en los cuerpos ordenados arquimedianos no es necesario explicitar tal distinción, debido a que toda sucesión de racionales de Cauchy en Q (respectivamente, convergente en Q) es de Cauchy en K (respectivamente, convergente en K).

Proposición 14

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de racionales, de Cauchy en Q, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy en K.

Demostración:

Por ser $(K,+,\cdot,\leq)$ un cuerpo ordenado arquimediano, para cada $\varepsilon \in K^+-\{0\}$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $1/n_o < \varepsilon$; ahora bien $1/n_o \in Q^+-\{0\}$, por tanto, al ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesión de Cauchy en Q, existirá $n_1 \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_1 \wedge m \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1/n_o < \varepsilon).$$

Luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy, considerada como de elementos de K.

□

Proposición 15

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de racionales convergente (en Q) a $x\in Q$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $x\in Q$, en el cuerpo K.

Demostración:

El razonamiento es análogo al de la proposición anterior.

□

A continuación, vamos a obtener una nueva caracterización de cuerpos ordenados arquimedianos, en términos de convergencia.

Teorema 1

Un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ es arquimediano sí y sólo sí, para cada elemento $x\in K$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números racionales convergente, en el cuerpo K, a x.

Demostración:

Si $(K,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano, entonces Q, considerado como subconjunto de K, es denso en $(K,\leq)$, luego dado $x\in K$ se verificará para cada $n\in\mathbb{N}^*$: $]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[\ \cap\ Q\neq\emptyset$; sea $x_n\in\ ]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[\cap Q$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. Trivialmente, la sucesión de números racionales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente, en K, a $x\in K$.

Recíprocamente, supongamos que para cada elemento del cuerpo ordenado existe una sucesión de racionales convergente, en K, a dicho elemento; sean $x\in K$ e $y\in K$ tales que $x<y$, consideremos $z=\frac{x+y}{2}$ y notemos $\varepsilon = z-x$. En tal situación, existirá una sucesión de racionales $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente, en K, a z; luego dado $\varepsilon = z-x\in K^+-\{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\ \wedge\ n\geq n_o\ \Rightarrow\ z_n\in\ ]z-\varepsilon,z+\varepsilon[\ =\ ]x,y[\,)$$

En consecuencia $]x,y[\cap Q\neq\emptyset$, es decir Q, considerado como subconjunto de K, es denso en $(K,\leq)$; por tanto, el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ es arquimediano.

□

Teorema 2

Sea $(K,+,\cdot,\leq)$ un cuerpo ordenado arquimediano, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(K)$ y $x\in K$. En tal situación, son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) x es valor de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ el conjunto $A_\varepsilon=\{n: (n\in\mathbb{N}^*)\wedge(|x_n-x|<\varepsilon)\}$ es infinito.

Demostración:

a)$\Rightarrow$b): Si $x\in K$ es valor de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente a x, entonces para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirá $k_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada número natural k $(k\geq k_o)$, se verifica $|x_{n_k}-x|<\varepsilon$. Por tanto $\{n_k\in\mathbb{N}^*: k\geq k_o\}\subset A_\varepsilon$ luego el conjunto A_ε es infinito.

b)$\Rightarrow$a): Supongamos ahora que, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ el conjunto A_ε es infinito; vamos a probar que x es valor de adherencia de la sucesión. La idea de la demostración es la siguiente: construiremos una sucesión parcial $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de tal manera que $n_1\in A_1$, n_2 sea un elemento de $A_{1/2}$ verificando $n_2>n_1$ (que existirá por ser $A_{1/2}$ infinito); y, supuesto construidos $x_{n_1},x_{n_2},\ldots,x_{n_k}$, entonces n_{k+1} será un elemento de $A_{1/k+1}$ verificando $n_{k+1}>n_k$ (que existirá por ser $A_{1/k+1}$ infinito). La sucesión parcial así construida será convergente a x. Pues bien, vamos a rigorizar dicho proceso.

Notemos, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$: $B_\varepsilon=]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ y si $k\in\mathbb{N}^*$ sea $B(\varepsilon,k)=\{n:(n\in\mathbb{N}^*)\wedge(n>k)\wedge(x_n\in B_\varepsilon)\}\subset A_\varepsilon$. Puesto que A_ε es infinito resultará $B(\varepsilon,k)\neq\emptyset$; notemos $p(\varepsilon,k)=\min B(\varepsilon,k)$ y observemos que $p(\varepsilon,k)>k$ y $x_{p(\varepsilon,k)}\in B_\varepsilon$ $(\forall\varepsilon\in K^+-\{0\})$.

Consideremos la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}^*-\{1\},\leq)$ en $\mathbb{N}^*$ definida así: si $\varphi\in F(S(k);\mathbb{N}^*)$ $(k\in\mathbb{N}^*-\{1\})$, entonces $H(\varphi)=p(1/k,\varphi(k-1))$. Observemos que de la definición de H resulta

$$H(\varphi)>\varphi(k-1) \qquad \text{y} \qquad x_{H(\varphi)}\in B_{1/k}.$$

En tal situación, si $n_1\in B(1,1)\neq\emptyset$ entonces del corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (cap.

II; & 5; pág. 149) deducimos la existencia de una única aplicación $f \in F(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ verificando

a) $f(1) = n_1$

b) $(\forall k)(k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(k+1) = H(\quad|_{S(k+1)}) = p(\frac{1}{k+1}, f(k)))$.

Así pues $(\forall k)(k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(k+1) > f(k))$, luego f es una aplicación estrictamente creciente; por tanto, si notamos $f(k) = n_k$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ resulta que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Veamos, finalmente, que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a x; en efecto, para cada $k \in \mathbb{N}^*$ se verifica $x_{n_k} = x_{f(k)} \in B_{1/k}$.

Ahora bien, por ser el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ arquimediano, para cada $\varepsilon \in K^+ - \{0\}$ existirá $\nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $1/\nu < \varepsilon$. Por tanto, si k es un número natural mayor o igual que ν, entonces $x_{n_k} \in B_{1/k} \subset B_{1/\nu}$; es decir $|x_{n_k} - x| < 1/\nu < \varepsilon$.

Conclusión: la sucesión parcial $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge a x, lo que completa la demostración.

□

§ 4. COMPLETACION DE UN CUERPO ORDENADO

En el presente parágrafo pretendemos desarrollar un proceso que nos permita asociar a cada cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leq)$ un cuerpo ordenado completo $(\widetilde{K},+,\cdot,\leq)$ que sea extensión ordenada de un cuerpo ordenado isomorfo, como cuerpo ordenado, a $(K,+,\cdot,\leq)$ y de tal manera que K, identificado a un subconjunto de $\widetilde{K}$ por el isomorfismo anterior, sea un conjunto denso en $(\widetilde{K},\leq)$. El proceso consta esquemáticamente de los siguiente pasos:

1.- Se considera el conjunto $C(K)$ y se demuestra que es un subanillo unitario y conmutativo de $(S(K),+,.)$.

2.- Se considera el conjunto $N(K)$ de las sucesiones de elementos de K convergentes a cero y se prueba que es un ideal del anillo $(C(K),+,.)$.

3.- Se demuestra que el anillo cociente $(C(K)/N(K),+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

4.- Dotamos al cuerpo $(C(K)/N(K),+,\cdot)$ de una estructura de cuerpo ordenado, a partir de la ordenación de K, de manera que podamos sumergir K, como cuerpo ordenado, en $C(K)/N(K)$.

5.- Respecto de dicha ordenación, el conjunto K, identificado con un subconjunto de $C(K)/N(K)$, es denso en $(C(K)/N(K),\leqslant)$.

6.- Finalmente, se demuestra que el cuerpo ordenado $(C(K)/N(K),+,\cdot,\leqslant)$ es completo.

□

Proposición 1

El conjunto C(K) es una subálgebra unitaria y conmutativa de $(S(K),+,\cdot)$, respecto de las operaciones usuales; además, los elementos invertibles de dicha subálgebra son las sucesiones de Cauchy de elementos de K que poseen todos sus términos distintos de cero y no convergen a cero.

Demostración:

Para probar que C(K) es una subálgebra unitaria y conmutativa de $(S(K),+,\cdot)$ será suficiente demostrar que la suma, el producto y el producto por elementos de K, definen sendas operaciones en C(K) y que $\{1\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$.

a) Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$ y $\varepsilon\in K^+-\{0\}$; entonces, existirán $n_o\in\mathbb{N}^*$ y $n_1\in\mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (n\geqslant n_o \wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon/2)\wedge$$
$$(n\geqslant n_1 \wedge m\geqslant n_1 \Rightarrow |y_n-y_m|<\varepsilon/2))$$

Si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$, para cada $n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_2 \wedge m\geqslant n_2$, resultará $|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)| \leqslant |x_n-x_m|+|y_n-y_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, luego

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}+\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K).$$

b) Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$ y $\lambda\in K$; si $\lambda=0$ entonces $\lambda\cdot\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$ ya que $\lambda\cdot\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión constante; si $\lambda\in K-\{0\}$ y $\varepsilon\in K^+-\{0\}$, aplicando la definición de sucesión de Cauchy a $\varepsilon\cdot|\lambda|^{-1}\in K^+-\{0\}$, existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in \mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o \wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon|\lambda|^{-1}),$$

de donde resulta para cada $n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in \mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o \wedge m\geqslant n_o$ que

$$|\lambda x_n-\lambda x_m| = |\lambda|\cdot|x_n-x_m| < |\lambda|\cdot\varepsilon\cdot|\lambda|^{-1} = \varepsilon$$

lo cual demuestra que

$$\lambda \cdot \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K).$$

c) Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$; puesto que toda sucesión de Cauchy está acotada, existirán elementos $A\in K^+-\{0\}$ y $B\in K^+-\{0\}$ tales que, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifique $|x_n|\leqslant A$ e $|y_n|\leqslant B$.

Si $\varepsilon\in K^+-\{0\}$, entonces existirán elementos $n_o\in\mathbb{N}^* \wedge n_1\in\mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in \mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o \wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon\cdot B^{-1}/2)$$

y

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in \mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_1 \wedge m\geqslant n_1 \Rightarrow |y_n-y_m|<\varepsilon\cdot A^{-1}/2)$$

de donde, si notamos $n_2 = \max\{n_o,n_1\}$ resultará para cada

$$n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_2$$

que

$$|x_n y_n-x_m y_m|\leqslant|x_n|\cdot|y_n-y_m|+|y_m|\cdot|x_n-x_m|<A\cdot\varepsilon A^{-1}/2 + B\cdot\varepsilon\cdot B^{-1}/2 = \varepsilon;$$

por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\cdot\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$.

d) Puesto que toda sucesión constante es convergente, será también de Cauchy, luego $\{1\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$.

Finalmente, vamos a obtener los elementos invertibles de la subálgebra.

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$ es una sucesión de Cauchy no convergente a cero que posee todos sus términos distintos de cero; existirá $\varepsilon_o\in K^+-\{0\}$ tal que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n'\in\mathbb{N}^* \wedge n'\geqslant n \wedge |x_{n'}|\geqslant\varepsilon_o))$$

de donde resultará, dado $\varepsilon_o \in K^+-\{0\}$, que existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o \wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon_o/2),$$

luego para cada $n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o$ obtendremos

$$|x_n| \geqslant |x_{n_o'}| - |x_n - x_{n_o'}| > \varepsilon_o - \frac{\varepsilon_o}{2} = \frac{\varepsilon_o}{2}$$

y por tanto, para cada $m\in\mathbb{N}^* \wedge n\in\mathbb{N}^* \wedge m\geqslant n_o \wedge n\geqslant n_o$, se verifica

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_n|\cdot|x_m|} < \frac{|x_m - x_n|}{\varepsilon_o^2/4}$$

Dado $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ sea $n_1\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_1 \wedge m\geqslant n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon\cdot\varepsilon_o^2}{4}$$

En tal situación, si notamos $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$ resultará, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant n_2$, $m\geqslant n_2$:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| < \frac{|x_m - x_n|}{\varepsilon_o^2/4} < \frac{\varepsilon\cdot\varepsilon_o^2/4}{\varepsilon_o^2/4} = \varepsilon \quad ;$$

luego $\{1/x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ es el elemento inverso de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ respecto del producto de sucesiones.

Obviamente, si una sucesión de Cauchy de elementos de K posee algún término igual a cero, no será invertible.

Finalmente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ fuese invertible e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ verificara $x_n\cdot y_n = 1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ deduciríamos la existencia de $A\in K^+-\{0\}$ tal que $|y_n| \leqslant A$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, luego $A^{-1} \leqslant |x_n|$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y, por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no converge a cero.

□

Proposición 2

El conjunto $C^*(K)$ es una subálgebra unitaria y conmutativa de $(S(K),+,\cdot)$, respecto de las operaciones usuales; además, los elementos invertibles de dicha subálgebra son las sucesiones convergentes

de elementos de K que poseen todos sus términos distintos de cero y no convergen a cero.

Demostración:

a) Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C^*(K)$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C^*(K)$ convergentes a x e y, respectivamente. Entonces, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirán $n_o\in\mathbb{N}^*\wedge n_1\in\mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (n\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x|< \varepsilon/2) \wedge (n\geq n_1 \Rightarrow |y_n-y|< \varepsilon/2))$$

Si notamos $n_2 = \max\{n_o,n_1\}$, para cada $n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geq n_2$ resultará:

$$|(x_n+y_n)-(x+y)| \leqslant |x_n-x| + |y_n-y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}+\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C^*(K)$. Más aún, hemos probado que el límite de la suma de sucesiones convergentes es la suma de límites.

b) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C^*(K)$ es una sucesión convergente a x y $\lambda\in K$, entonces o bien $\lambda=0$, en cuyo caso la sucesión $\lambda\cdot\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero, o bien $\lambda\in K-\{0\}$, en cuyo caso dado $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x|< \varepsilon\cdot|\lambda|^{-1}$, de donde resulta, para cada número natural n $(n\geqslant n_o)$:

$$|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda|\cdot|x_n-x| < |\lambda|\cdot\varepsilon\cdot|\lambda|^{-1} = \varepsilon.$$

Por tanto, la sucesión $\lambda\cdot\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $\lambda\cdot x$.

c) Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C^*(K)$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C^*(K)$ convergentes a x e y, respectivamente; puesto que toda sucesión convergente está acotada, existirá $A\in K^+-\{0\}$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica $|x_n| \leqslant A$. Si $y = 0$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\cdot\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero. Si $y\in K - \{0\}$ y $\varepsilon\in K^+ - \{0\}$, entonces existirán $n_o\in\mathbb{N}^*$ y $n_1\in\mathbb{N}^*$ tales que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x| < \frac{\varepsilon\cdot|y|^{-1}}{2}$) y $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_1 \Rightarrow |y_n-y|<\frac{\varepsilon\cdot A^{-1}}{2})$ de donde, si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$ resultará, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant n_2$: $|x_ny_n - xy| \leqslant |x_n|\cdot|y_n - y| + |y|\cdot|x_n - x| < \frac{A\varepsilon A^{-1}}{2} + \frac{|y|\varepsilon|y|^{-1}}{2} = \varepsilon$.
Por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\cdot\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a x.y.

d) Puesto que toda sucesión constante es convergente, se verificará

$$\{1\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C^*(K)$$

Finalmente, vamos a obtener los elementos invertibles de la subálgebra.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C^*(K)$ una sucesión convergente a $x\in K - \{0\}$ que posee todos sus términos distintos de cero. En tal situación, existirán $\varepsilon_o \in K^+ - \{0\}$ y $n_o \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ tales que, para cada número natural n $(n \geqslant n_o)$, se verifica $|x_n| > \frac{\varepsilon_o}{2}$. Luego, si notamos $A = \min\left\{\frac{\varepsilon_o}{2}, |x_1|, \ldots, |x_{n_o-1}|\right\}$ resultará $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |x_n| \geqslant A)$.

Dado $\varepsilon \in k^+ - \{0\}$ sea $n_1 \in N^*$ tal que, para cada $n \in N^* \wedge n \geqslant n_1 : |x_n - x| < A.|x|.\varepsilon$; luego obtendremos $(\forall n)\,(n\in N^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{|x_n|.|x|} < \frac{|x_n - x|}{A.|x|} < \frac{\varepsilon.A.|x|}{A.|x|} = \varepsilon)$.

Así pues, la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $\frac{1}{x}$, es decir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es invertible.

Obviamente, si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C^*(K)$ posee algún término igual a cero, no será invertible; y si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C^*(K)$ converge a cero, entonces para cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C^*(K)$ resultará que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cdot \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero; es decir, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no será invertible.

□

Corolario

El conjunto $N(K) = \{x : x\in S(K) \wedge$ x es una sucesión convergente a cero$\}$ es un ideal del anillo unitario conmutativo $(C(K), +, .)$.

Demostración:

Basta tener presente que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K) \wedge \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K) \wedge \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$, entonces de la proposición anterior deducimos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} - \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K)$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cdot \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K)$ y, además, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cdot \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K)$ ya que la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, por ser de Cauchy, está acotada.

□

En tales condiciones, pues, podemos considerar el anillo cociente de $(C(K), +, \cdot)$ por el ideal $N(K)$.

Teorema 1

El anillo cociente $(C(K)/N(K), +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

Demostración

Puesto que $(C(K)/N(K), +, \cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo, bastará demostrar que todo elemento $\alpha \in C(K)/N(K) - \{0\}$ posee elemento inverso respecto del producto. En efecto, sea $\alpha \in C(K)/N(K) - \{0\}$ y consideremos un representante de dicha clase de equivalencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \alpha$; puesto que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K no convergente a cero, existirán $\varepsilon_o \in K^+ - \{0\}$ y $n_o \in \mathbb{N}^*$ tales que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow |x_n| > \frac{\varepsilon_o}{2})$. En tal situación, definimos $y_n = x_n$ (si $n\in\mathbb{N}^*$ y $n \geqslant n_o$) e $y_n = 1$ (si $n\in\mathbb{N}^*$ y $n < n_o$). La sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es, trivialmente, de Cauchy de elementos de K. Además, todos sus términos son distintos de cero y no es convergente a cero; en consecuencia, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ será invertible: sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ su inverso respecto del producto y consideremos $\beta = \overline{\{z_n\}}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Trivialmente, $\beta \in C(K)/N(K)$ verifica $\beta \cdot \alpha = 1$ y, por tanto, $\alpha \in C(K)/N(K) - \{0\}$ posee elemento inverso respecto del producto, lo que completa la demostración del teorema.

□

Del teorema anterior deducimos, entonces, que el ideal N(K) de $(C(K),+,.)$ es maximal.

Notaremos $\widetilde{K} = C(K)/N(K)$. A continuación, pretendemos introducir una ordenación $\leqslant$ en $\widetilde{K}$, de forma que dote a $(\widetilde{K}, +, .)$ de estructura de cuerpo ordenado completo y por la cual podamos sumergir a K, como cuerpo ordenado, en $\widetilde{K}$; siendo, además, K un conjunto denso en $(\widetilde{K}, \leqslant)$.

Definición: Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ es estrictamente positiva (respectivamente, estrictamente negativa) sí y sólo sí, existen $A \in K^+ - \{0\}$ y $n_o \in \mathbb{N}^*$ tales que, para cada número natural n $(n \geqslant n_o)$, se verifica $x_n > A$ (respectivamente, $x_n < -A$).

Obsérvese, en primer lugar, que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ es estrictamente positiva sí y sólo si la sucesión $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ es estrictamente negativa; en particular, una sucesión de Cauchy de elementos de K no puede ser, simultáneamente, estrictamente positiva y estrictamente negativa.

Y, en segundo lugar, téngase presente que todos los términos de una sucesión de Cauchy de elementos de K pueden ser estrictamente positivos y, en cambio, la sucesión no ser estrictamente positiva; por ejemplo, en un

cuerpo ordenado arquimediano $(K, +, ., \leqslant)$ la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a cero (por tanto, no será estrictamente positiva) si bien, todos sus términos son estrictamente positivos en K.

Pretendemos, ahora, demostrar que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ o es estrictamente positiva o es estrictamente negativa o es convergente a cero, siendo excluyentes las anteriores disyunciones; para ello, necesitamos previamente la siguiente proposición:

Proposición 3

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ verifica la condición

$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(\exists n")(n'\in\mathbb{N}^* \wedge n"\in\mathbb{N}^* \wedge n' \geqslant n \wedge n" \geqslant n \wedge x_{n'}\in K^+ \wedge x_{n"}\in K^-))$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K)$.

Demostración

Puesto que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$, para cada $\varepsilon\in K^+ - \{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, si $n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \wedge m \geqslant n_o$ entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$; ahora bien, si $n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \wedge x_n \in K^+$ resultará $|x|_n = x_n \leqslant x_n + (-x_{n"_o}) = |x_n - x_{n"_o}| < \varepsilon$, y si $n\in\mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_o$ y $x_n \in K^-$ resultará

$$|x_n| = -x_n \leqslant -x_n + x_{n'_o} = |x_n - x_{n'_o}| < \varepsilon .$$

Por tanto $(\forall n)\ (n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow |x_n| < \varepsilon)$.

Es decir, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K)$. □

Proposición 4

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ entonces, o bien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente positiva o bien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente negativa o bien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in N(K)$.

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K) - N(K)$, entonces existirán $A\in K^+ - \{0\}$ y $n_o \in \mathbb{N}^*$ tales que, para cada natural n $(n \geqslant n_o)$, se verifica $|x_n| > A$; por tanto, de la proposición anterior deducimos que

a) o bien existe $n_1\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow x_n \in K^+)$

b) o bien existe $n_2\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_2 \Rightarrow x_n \in K^-)$.

Si notamos $n_3 = \max |n_o, n_1|$ y $n_4 = \max |n_o, n_2|$ obtendremos en el caso a): $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_3 \Rightarrow x_n = |x_n| > A)$; y en el caso b): $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_4 \Rightarrow -x_n = |x_n| > A)$.

Así pues, si $|x_n|_{n \in \mathbb{N}^*} \in C(K) - N(K)$ concluimos que la sucesión $|x_n|_{n \in \mathbb{N}^*}$ o es estrictamente positiva o es estrictamente negativa.

□

Proposición 5

Si x es un elemento de $\widetilde{K}$ tal que existe un representante $|x_n|_{n \in \mathbb{N}^*} \in C(K)$ de x que es una sucesión estrictamente positiva, entonces cualquier representante de x es una sucesión estrictamente positiva.

Demostración:

Sea $x \in \widetilde{K}$ tal que existe un representante $|x_n|_{n \in \mathbb{N}^*} \in C(K)$ de x que es una sucesión estrictamente positiva; sea $|y_n|_{n \in \mathbb{N}^*} \in C(K)$ otro representante de la clase de equivalencia x.

Puesto que $|x_n|_{n \in \mathbb{N}^*}$ es estrictamente positiva, existirán $A \in K^+ - |0|$ y $n_o \in \mathbb{N}^*$ tales que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow x_n > A)$; si notamos $z_n = y_n - x_n\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ existirá $n_1 \in \mathbb{N}^*$ verificado $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow |z_n| < \frac{A}{2})$, luego en particular $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow z_n > -\frac{A}{2})$. Por tanto, si notamos $n_2 = \max |n_o, n_1|$ obtendremos, para cada natural n $(n \geqslant n_2)$: $y_n = x_n + z_n > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} \in K^+ - |0|$; es decir, la sucesión $|y_n|_{n \in \mathbb{N}^*}$ es estrictamente positiva.

□

Consideramos a continuación, los conjuntos

$\widetilde{K}^+ = |x : (x \in \widetilde{K}) \wedge ((x=0) \vee (\text{Existe un representante de x que es una sucesión estrictamente positiva}))|$

$\widetilde{K}^- = |x : (x \in \widetilde{K}) \wedge (-x \in \widetilde{K}^+)|$,

de donde resulta inmediatamente que

$\widetilde{K}^- = |x : (x \in \widetilde{K}) \wedge ((x=0) \vee (\text{Existe un representante de x que es una sucesión estrictamente negativa}))|$.

Veamos que $\widetilde{K}^+$ y $\widetilde{K}^-$, subconjuntos de $\widetilde{K}$, verifican las propiedades características que permiten dotar a $(\widetilde{K}, +, .)$ de estructura de cuerpo ordenado.

Teorema 2

Se verifican las siguientes relaciones:

a) $\widetilde{K}^+ + \widetilde{K}^+ \subset \widetilde{K}^+$

b) $\widetilde{K}^+ \cdot \widetilde{K}^+ \subset \widetilde{K}^+$

c) $\widetilde{K}^+ \cap \widetilde{K}^- = \{0\}$

d) $\widetilde{K}^+ \cup \widetilde{K}^- = \widetilde{K}$

Demostración:

a) y b): Sean $x\in\widetilde{K}^+$ e $y\in\widetilde{K}^+$; si $x = 0$ o $y = 0$, entonces trivialmente $x+y\in\widetilde{K}^+$ y $x.y=0\in\widetilde{K}^+$; supongamos pues $x\neq 0$ e $y\neq 0$ y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ representantes estrictamente positivos de dichas clases de equivalencia. En tal situación, existirán $A\in K^+-\{0\} \wedge B\in K^+-\{0\} \wedge n_o\in\mathbb{N}^* \wedge n_1\in\mathbb{N}^*$ tales que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n>A)$ y $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_1 \Rightarrow y_n>B)$ de donde, si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$ obtenemos $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_2 \Rightarrow x_n+y_n>A+B\in K^+-\{0\})$ y $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_2 \Rightarrow x_n.y_n>A.B\in K^+-\{0\})$, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}+\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in\widetilde{K}^+$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\cdot\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in\widetilde{K}^+$.

c) Si $x\in\widetilde{K}^+\cap\widetilde{K}^-$ entonces ha de verificarse $x=0$ ya que, de lo contrario, la clase de equivalencia x poseería representantes estrictamente positivos y estrictamente negativos, lo que no es posible (proposición 5).

d) Es consecuencia inmediata de la proposición 4.

□

Conclusión: $(\widetilde{K}, +, ., \leq)$ es un cuerpo ordenado, respecto de la ordenación $\leq$ asociada a $\widetilde{K}^+$ y definida así: para cada $x\in\widetilde{K}\wedge y\in\widetilde{K}$:
$[x\leqslant y] \Leftrightarrow [y-x\in\widetilde{K}^+]$.

Proposición 6 (Inmersión de $(K,+,.,\leq)$ en $(\widetilde{K},+,.,\leq)$)

La aplicación $f\in F(K;\widetilde{K})$ definida por $f(x) = \overline{\{x\}}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es un monomorfismo de cuerpos ordenados, de $(K,+,.,\leq)$ en $(\widetilde{K},+,.,\leq)$.

Demostración:

Si $x\in K$ e $y\in K$ entonces se verifica:

$$f(x+y)=\overline{\{x+y\}}_{n\in\mathbb{N}^*} = \overline{\{x\}_{n\in\mathbb{N}^*}+\{y\}_{n\in\mathbb{N}^*}} = \overline{\{x\}}_{n\in\mathbb{N}^*}+\overline{\{y\}}_{n\in\mathbb{N}^*} = f(x) + f(y)$$

$$f(x.y)=\overline{\{x.y\}}_{n\in\mathbb{N}^*} = \overline{\{x\}_{n\in\mathbb{N}^*}\cdot\{y\}_{n\in\mathbb{N}^*}} = \overline{\{x\}}_{n\in\mathbb{N}^*}\cdot\overline{\{y\}}_{n\in\mathbb{N}^*} = f(x)\ .\ f(y),$$

luego f es un morfismo del cuerpo $(K,+,.)$ en el cuerpo $(\widetilde{K},+,.)$. Además, si $x<y$ resulta $y-x>0$, por tanto $f(y-x) = \overline{\{y-x\}}_{n\in\mathbb{N}^*}>0$ y, puesto que f es un morfismo de cuerpos concluimos $f(y)-f(x)>0$, luego

f es un morfismo de orden inyectivo de $(K,\leq)$ en $(\widetilde{K},\leq)$.

□

La anterior proposición nos permitirá identificar K con $f(K) \subset \widetilde{K}$, de manera que dicha identificación respeta las correspondientes estructuras de cuerpo y de orden, de las que están dotadas K y $\widetilde{K}$. Así, tal inmersión nos permitirá considerar a $(K,+,.,\leq)$ como subcuerpo ordenado de $(\widetilde{K},+,.,\leq)$.

Teorema 3

El conjunto K, considerado como subconjunto de $\widetilde{K}$, es denso en el conjunto totalmente ordenado $(\widetilde{K},\leq)$.

Demostración:

Sean $x\in\widetilde{K}$, $y\in\widetilde{K}$ tales que $x<y$; sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sendos representantes de dichas clases de equivalencia; puesto que $x<y$ la sucesión $\{y_n-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ será estrictamente positiva, por tanto existirán $A\in K^+-\{0\}$ y $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geq n_o \Rightarrow y_n-x_n>A)$. Por otra parte, dado $\frac{A}{4}\in K^+-\{0\}$ existirán $n_1\in\mathbb{N}^*$ y $n_2\in\mathbb{N}^*$ tales que

$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geq n_1\wedge m\geq n_1 \Rightarrow |x_n-x_m|<\frac{A}{4})$ y

$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geq n_2\wedge m\geq n_2 \Rightarrow |y_n-y_m|<\frac{A}{4})$. Notemos $n_3=$

$= \max\{n_o,n_1,n_2\}$ y consideremos $c=\frac{x_{n_3}+y_{n_3}}{2}\in K$; veamos que se verifica $x<c<y$, para lo cual será suficiente probar que las sucesiones $\{y_n-c\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{c-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son estrictamente positivas.

Basta observar que para cada número natural n $(n\geq n_3)$, se verifica:

$$y_n - c = y_n - y_{n_3} + y_{n_3} - \frac{x_{n_3}+y_{n_3}}{2} = y_n - y_{n_3} + \frac{y_{n_3}-x_{n_3}}{2} \geq$$

$$\geq -|y_n - y_{n_3}| + \frac{y_{n_3}-y_{n_3}}{2} > -\frac{A}{4}+\frac{A}{2}=\frac{A}{4}\in K^+-|0|.$$ Análoga consideración para la sucesión $\{c-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

□

Corolario

El conjunto K, considerado como subconjunto de $\widetilde{K}$, no está acotado superiormente en $(\widetilde{K},\leq)$.

En efecto: hemos de probar que para cada $x\in\widetilde{K}$ existe $y\in K$ tal que $x<y$

Si $x \leq 0$, basta tomar $y = 1 \in K$; en cambio, si $x > 0$ entonces $\frac{1}{x} > 0$, luego de la densidad de K en $(\widetilde{K},\leq)$ deducimos la existencia de un elemento $c \in K$ verificando $0 < c < \frac{1}{x}$, de donde resulta $0 < x < \frac{1}{c}$; en tal situación, bastará tomar $y = \frac{1}{c} \in K$. □

La inmersión de K en $\widetilde{K}$ nos permitirá considerar una sucesión de elementos de K como sucesión de elementos de $\widetilde{K}$; en una tal sucesión, incidirán las convergencias de los cuerpos ordenados $(K,+,.,\leq)$ y $(\widetilde{K},+,.,\leq)$, así como la condición de ser sucesión de Cauchy; pues bien, vamos a establecer que en las sucesiones de elementos de K coinciden los conceptos de convergencia y de sucesión de Cauchy, en K y en $\widetilde{K}$.

Proposición 7

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ converge en K a $x \in K$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ converge en $\widetilde{K}$ a $x \in K$. Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ converge en $\widetilde{K}$ a $x \in K$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ converge en K a $x \in K$.

Demostración:

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ converge en K a $x \in K$; dado $\varepsilon \in \widetilde{K}^+ - \{0\}$ sea $\varepsilon' \in K^+ - \{0\}$ tal que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Puesto que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ converge en K a $x \in K$, dado $\varepsilon' \in K^+ - \{0\}$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon' < \varepsilon)$ luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ es convergente en $\widetilde{K}$ a $x \in K$.

Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ converge en $\widetilde{K}$ a $x \in K$, entonces converge en K a $x \in K$, ya que $K^+ - \{0\} \subset \widetilde{K}^+ - \{0\}$.

□

Notación: Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ es convergente en K a $x \in K$ (respectivamente, en $\widetilde{K}$ a $y \in \widetilde{K}$), notaremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[\widetilde{K}]{} x$ o bien $\lim_{\substack{n\to\infty \\ K}} x_n = x$ (respectivamente, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[\widetilde{K}]{} y$, o bien $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \widetilde{K}}} x_n = y$).

Proposición 8

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de elementos de K. En tal situación, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy en K sí y sólo sí es de Cauchy en $\widetilde{K}$.

Demostración:

El razonamiento es análogo al de la proposición anterior.

□

Un elemento de $\widetilde{K} = C(K)/N(K)$ es una clase de equivalencia cuyos representantes son sucesiones de Cauchy de elementos de K; sucesiones que, la inmersión de K en $\widetilde{K}$, nos permite considerarlas como de elementos de $\widetilde{K}$.

Nos disponemos demostrar, a continuación, que cada elemento de $\widetilde{K}$ es el límite, según la convergencia de $\widetilde{K}$, de cualquier sucesión de Cauchy de elementos de K, representante del elemento de $\widetilde{K}$ en cuestión.

Proposición 9

Si $x \in \widetilde{K}$ y $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ es tal que $x = \overline{|x_n|}_{n\in\mathbb{N}^*}$, entonces la sucesión $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en $\widetilde{K}$ a x.

Demostración:

Sea $\varepsilon \in \widetilde{K}^+ - |0|$ y consideremos $\varepsilon' \in K^+ - |0|$ tal que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$; puesto que $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K)$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(\forall m)(n \in \mathbb{N}^* \wedge m \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \wedge m \geqslant n_o \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon')$. Consideremos un número natural n $(n \geqslant n_o)$ arbitrario pero fijo en el siguiente proceso. La sucesión $|x_n - x_m|_{m\in\mathbb{N}^*}$ es un representante del elemento $x_n - x \in \widetilde{K}$; ahora bien, teniendo presente que, para cada natural m $(m \geqslant n_o)$, se verifica $|x_n - x_m| < \varepsilon'$, es decir $-\varepsilon' < x_n - x_m < \varepsilon'$, resultará $-\varepsilon' \leqslant x_n - x \leqslant \varepsilon'$ (en efecto: basta observar que las sucesiones $|x_n - x_m + \varepsilon'|_{m\in\mathbb{N}^*}$ y $|\varepsilon' - x_n + x_m|_{m\in\mathbb{N}^*}$ son de Cauchy de elementos de K no estrictamente negativas, luego los elementos de $\widetilde{K}$ que determinan han de ser positivos, de donde sigue la relación $-\varepsilon' \leqslant x_n - x \leqslant \varepsilon'$).

Finalmente, puesto que $\varepsilon' < \varepsilon$ concluimos

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow |x_n - x| \leqslant \varepsilon' < \varepsilon)$$

es decir, la sucesión $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en $\widetilde{K}$ a $x \in \widetilde{K}$.

□

Teorema 4 (de completitud)

El cuerpo ordenado $(\widetilde{K}, +, \cdot, \leqslant)$ es completo.

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\widetilde{K}$; veamos, en primer lugar, que podemos suponer sin que ello implique restricción alguna, que la sucesión en cuestión verifica que dos términos consecutivos arbitrarios son siempre distintos.

En efecto: dada la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(\widetilde{K})$, o bien existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)\ (n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n = x_{n+1})$ (en cuyo caso, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sería convergente a x_{n_o}); o bien, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ existe $n'\in\mathbb{N}^*$ tal que $n'>n\wedge x_n\neq x_{n'}$, en tal caso, si notamos para cada $k\in\mathbb{N}^*$

$$A_k = \{p : p\in\mathbb{N}^*\wedge p>k\wedge x_p\neq x_k\}$$

(que, obviamente, es un subconjunto no vacio de $\mathbb{N}^*$ y, por tanto, posee primer elemento) consideramos la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}^*-\{1\},\leqslant)$ en $\mathbb{N}^*$ definida así: si $\varphi\in F(S(k);\mathbb{N}^*)\ (k\in\mathbb{N}^*-\{1\})$, entonces $H(\varphi) = \text{mín } A_{\varphi(k-1)}$. Elegido mín $A_1\in\mathbb{N}^*$ el corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (cap. II; §5; pág. 149) asegura la existencia de una única aplicación $f\in F(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ verificando

a) $f(1) = \text{mín } A_1$

b) $(\forall k)(k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow f(k+1) = H(f_{|S(k+1)}) = \text{mín } A_{f(k)})$

Notemos $f(k) = n_k$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ y observemos que f es una aplicación estrictamente creciente; por tanto, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ será una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $x_{n_k}\neq x_{n_k+1}$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$. Teniendo presente que toda sucesión parcial de una de Cauchy también es de Cauchy, bastaría considerar entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$; ya que si demostramos que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a $x\in\widetilde{K}$, resultará que x será valor de adherencia de la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ será convergente a x.

Así pues, podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ posee siempre distintos, dos términos consecutivos arbitrarios; en tal situación, de la densidad de K en $(\widetilde{K},\leqslant)$ deducimos la existencia, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, de un elemento $y_n\in K$ perteneciente al intervalo abier

to de extremos x_n y x_{n+1}.

Lema 1:

La sucesión $|y_n|_{n\in\mathbb{N}^*}$, anteriormente considerada, es de Cauchy en K.

En efecto: puesto que la sucesión $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy en $\tilde{K}$ y $K^+-|0| \subset \tilde{K}^+-|0|$, entonces para cada $\varepsilon\in K^+-|0|$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall\, n)\ (n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon)\ ;$$

ahora bien, tal como hemos construido $|y_n|_{n\in\mathbb{N}^*}$ deducimos

$$|y_n - y_m| < |x_{n'} - x_{m'}| \quad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \forall\, m\in\mathbb{N}^*)$$

donde n' representa n o n+1, según el caso, y m' representa m o m+1, según el caso.

En definitiva pues, se verificará

$$(\forall\, n)\,(\forall\, m)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\wedge m\geqslant n_o \Rightarrow |y_n - y_m| < |x_{n'} - x_{m'}| < \varepsilon)$$

Conclusión: $|y_n|_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$.

Lema 2:

La sucesión $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(\tilde{K})$ converge en $\tilde{K}$ a $y = |\overline{y_n}|_{n\in\mathbb{N}^*}\in\tilde{K}$.

En efecto: si $y = |\overline{y_n}|_{n\in\mathbb{N}^*}\in\tilde{K}$, de la proposición 9 resulta que la sucesión $|y_n|_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en $\tilde{K}$ a $y\in\tilde{K}$; por tanto, para cada $\varepsilon\in\tilde{K}^+-|0|$ existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall\, n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon/2).$$

Por otra parte, puesto que $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(\tilde{K})$ existirá $n_1\in\mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall\, n)\,(\forall\, m)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge m\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_1\wedge m\geqslant n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/2).$$

Entonces, si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$ obtenemos, para cada número natural n $(n\geqslant n_2)$,

$$|x_n-y|\leqslant|x_n-y_n|+|y_n-y|<|x_n-x_{n+1}|+|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Conclusión: la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en $\widetilde{K}$ a $y\in\widetilde{K}$; lo que completa la demostración del teorema.

□

Es interesante observar que si el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano, entonces la demostración del teorema de completitud se simplifica notoriamente, debido a que el problema fundamental de la demostración consiste en asociar a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Cauchy de elementos de $\widetilde{K}$ una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de K que "aproxime" convenientemente a dicha sucesión y siendo, además, de Cauchy en K. Si el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano, entonces bastará considerar, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $y_n\in\left]x_n-\frac{1}{n},\ x_n+\frac{1}{n}\right[\cap K$; y teniendo presente que en un cuerpo ordenado arquimediano la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero, deduciríamos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy, concluyendo la demostración como antes.

Teorema 5

Si el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano, entonces $(\widetilde{K},+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y completo.

Demostración:

Todo se reduce a probar que el cuerpo ordenado $(\widetilde{K},+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano; ahora bien, puesto que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en K a cero, será también convergente a cero en $\widetilde{K}$, luego el cuerpo ordenado $(\widetilde{K},+,\cdot,\leqslant)$ será arquimediano.

□

PROBLEMAS

1.- Sea $(K,+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado y $(K',+,\cdot)$ una extensión del cuerpo $(K,+,\cdot)$. Demostrar que $(K',+,\cdot)$ admite una estructura de extensión ordenada de $(K,+,\cdot,\leqslant)$ sí y sólo sí para cada $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, para cada $x_1\in K',\ldots,x_n\in K'$ y para cada $\lambda_1\in K^+,\ldots,\lambda_n\in K^+$ se verifica $[\lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_nx_n^2=0 \Rightarrow \lambda_1x_1=\ldots=\lambda_nx_n=0]$.

Indicación: Si notamos $C=\{x:(\exists y)(y\in K'\wedge x=y^2)\}$ considérese el conjunto

$$A=\{M:(M\in P(K'))\wedge(M+M\subset M)\wedge(M\cdot M\subset M)\wedge(M\cap(-M)=\{0\})\wedge(K^+\cup C\subset M\}$$

Probar que $A\neq\emptyset$ y que $(A,\subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo. Aplicar el lema de Zorn.

2.- Consideremos el conjunto

$$A=\{f:(f\in F(\mathbb{N};Q))\wedge((\exists n)(n\in\mathbb{N}\wedge(\forall m)(m\in\mathbb{N}\wedge m>n \Rightarrow f(m)=0))\}$$

y, para cada $f\in A$, notemos

$$n_f=\min\{n:(n\in\mathbb{N})\wedge(\exists m)(m\in\mathbb{N}\wedge m>n \Rightarrow f(m)=0)\}.$$

En el conjunto

$$A=\{(f,g):(f,g)\in A\times A\wedge g(n_g)=1\}$$

definimos la relación R así: para cada $(f,g)\in A,(f',g')\in A$

$$(f,g)R(f',g') \Leftrightarrow f\cdot g'=f'\cdot g$$

a) Demostrar que R es de equivalencia en A.
b) Definimos en A/R dos operaciones internas (suma y producto) así: para cada $\overline{(f,g)}\in A/R$, $\overline{(f',g')}\in A/R$

$$\overline{(f,g)}+\overline{(f',g')}=\overline{(f\cdot g'+f'\cdot g,g\cdot g')}$$
$$\overline{(f,g)}\cdot\overline{(f',g')}=\overline{(f\cdot f',g\cdot g')}$$

i) Demostrar que $(A/R,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.
ii) Si notamos $(A/R)^+=\{\overline{(f,g)}:\overline{(f,g)}\in A/R\wedge f(n_f)\in Q^+\}$ demostrar que $(A/R)^+$ permite dotar, de manera natural, a $(A/R,+,\cdot)$ de estructura de cuerpo ordenado no arquimediano.

Indicación: ii) Obsérvese que si $f\in F(\mathbb{N};Q)$ y $g\in F(\mathbb{N};Q)$ están definidas por

$$f(0)=1,\ f(n)=0\ (\forall n\in\mathbb{N}-\{0\});\ g(1)=1,\ g(n)=0\ (\forall n\in\mathbb{N}-\{1\})$$

entonces se verifica que $\overline{(f,g)}\in(A/R)^+-\{0\}$ y, además, que para cada $n\in\mathbb{N}-\{0\}$: $\overline{(f,f)}-n\cdot\overline{(f,g)}\in(A/R)^+-\{0\}$.

3.- Sea $(K,+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado arquimediano y completo; sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(K)$ una sucesión de elementos de $K^+-\{0\}$ convergente a

cero. Demostrar que el conjunto

$$A = \{n : (n\in\mathbb{N}^*)\wedge(\forall m)(m\in\mathbb{N}^*\wedge m\geqslant n \Rightarrow a_m\leqslant a_n)\}$$

es infinito.

Indicación: Probar, en caso contrario, la existencia de un valor de adherencia de la sucesión, estrictamente mayor que cero.

4.- Sea $(K,+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado arquimediano y $a\in K$ un elemento tal que $|a|<1$; demostrar que la sucesión $\{|a|^n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero.

Indicación: Probar que si $x\in K^+-\{0\}$ entonces, para cada $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, se verifica $(1+x)^n>1+nx$; y tener presente que en un cuerpo ordenado arquimediano la sucesión $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero.

5.- Si A es un conjunto no vacío y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de elementos de A, demostrar la existencia de sucesiones $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(A)$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(A)$ unívocamente determinadas por las condiciones:

a) $a_1=b_1=c_1$.

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow b_{n+1} = b_n + a_{n+1})$.

c) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow c_{n+1} = c_n \cdot a_{n+1})$.

Indicación: Considérese las funciones de recurrencia H y H' del tipo $(\mathbb{N}-\{0\},\leqslant)$ en A definidas así: para cada $\varphi\in F(S(n);A)$ $(n\in\mathbb{N}-\{0\})$;

$$H(\varphi) = \varphi(\bar{n}) + a_n \quad y \quad H'(\varphi) = \varphi(\bar{n})\cdot a_n$$

6.- Sea $(K,+,\cdot\leqslant)$ un cuerpo ordenado; sean A y B subconjuntos acotados de $(K,\leqslant)$; notemos

$$A+B = \{x:(\exists y)(\exists z)(y\in A\wedge z\in B\wedge x = y+z)\}$$

$$\lambda\cdot A = \{x:(\exists y)(y\in A\wedge x = \lambda\cdot y)\} \quad \text{(para cada } \lambda\in\mathbb{R})$$

Demostrar:

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

c) $(\forall\lambda)(\lambda\in\mathbb{R}^+-\{0\} \Rightarrow (\sup(\lambda A) = \lambda\cdot\sup(A)\wedge \inf(\lambda A) = \lambda\cdot\inf(A)))$.

d) $(\forall\lambda)(\lambda\in\mathbb{R}^--\{0\} \Rightarrow (\sup(\lambda A) = \lambda\cdot\inf(A)\wedge \inf(\lambda A) = \lambda\cdot\sup(A)))$.

Indicación: Téngase presente que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

7.- Sea $(K,+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado y A un conjunto; consideramos en $F(A;K)$ las operaciones internas (suma y producto) definidas en el problema 2 del capítulo anterior, y que dotan a $(F(A;K),+,\cdot)$ de estructura de anillo unitario y conmutativo. Definimos en $F(A;K)$ la relación $\leqslant$ así: para cada $f\in F(A;K)$, $g\in F(A;K)$

$$[\, f \leqslant g \,] \;\Leftrightarrow\; [\, (\forall x)(x \in A \Rightarrow f(x) \leqslant g(x)) \,]$$

a) Demostrar que $(\mathcal{F}(A;K), +, \cdot, \leqslant)$ es un anillo ordenado, en general, no totalmente ordenado.

b) Si, para cada $f \in \mathcal{F}(A;K)$, notamos

$$\text{ínf } f = \text{ínf } [\, f(A) \,] \quad \text{y} \quad \sup f = \sup [f(A)]$$

(en caso de que tal ínfimo o supremo exista); demostrar que, en caso de existencia de los correspondientes ínfimos y supremos, se verifican las siguientes desigualdades

$$\text{ínf } (f+g) \geqslant \text{ínf } f + \text{ínf } g$$
$$\sup (f+g) \leqslant \sup f + \sup g$$

Dar ejemplos en que dichas desigualdades sean estrictas.

8.- Sea $(K,+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado; $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A = \{a_1,\ldots,a_n\} \subset K \quad \text{y} \quad B = \{b_1,\ldots,b_n\} \subset K^+ - \{0\}.$$

Demostrar la desigualdad

$$\text{mín } \{x : (\exists y)(\exists z)(y \in A \wedge z \in B \wedge x = y \cdot z^{-1})\} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \text{máx } \{x : (\exists y)(\exists z)(y \in A \wedge z \in B \wedge x = y \cdot z^{-1})\}.$$

Indicación: Téngase presente que

$$\text{mín } A \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{-1} \leqslant \text{máx } A.$$

9.- Sea $(K,+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado; $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(K)$ sucesiones convergentes a $x \in K$ e $y \in K$, respectivamente. Demostrar que la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $z_n = \text{máx}\{x_n, y_n\}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ es convergente y, además, su límite es $\text{máx}\{x,y\}$.

Indicación: Si $x \neq y$ entonces la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ coincide con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ o $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, a partir de un lugar en $\mathbb{N}^*$ adelante.

10.- Si $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in C(K) - N(K)$ ¿puede poseer una sucesión parcial convergente, en K, a cero? ¿Pueden existir dos sucesiones parciales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergentes, en $\widetilde{K}$, a +1 y -1, respectivamente?

11.- ¿Puede existir un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ tal que $\mathbb{N}$, considerado como subconjunto de K, sea denso en $(K,\leqslant)$?

12.- Consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números racionales defini

da por $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}^*$ y $k \in \mathbb{N}^*$ entonces $a_{n+k} - a_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ concluyendo que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in C(Q)$.

b) Demostrar que si $\lim_{k \to \infty} a_k = \frac{p}{n} \in Q$ entonces para cada $k \in \mathbb{N}^*$ se verifica

$$\left| \frac{p}{n} - a_{n+k} \right| > \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$ concluyendo que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \notin C^*(Q)$.

Indicación: a) Téngase presente que

$$a_{n+k} - a_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[1 + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\right] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

b) Téngase presente que $\left| \frac{p}{n} - a_{n+k} \right| \geqslant \left| \frac{p}{n} - a_n \right| - \left| a_n - a_{n+k} \right|$ y distíngase dos casos: $n > 1$ y $n = 1$.

13.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de elementos de un cuerpo ordenado $(K, +, \cdot, \leqslant)$. Si φ es una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{N}^*$ entonces diremos que la sucesión $\{a_{\varphi(k)}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es una reordenada de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente a $x \in K$ sí y sólo si toda sucesión reordenada de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente a $x \in K$.

Indicación: Redúzcase al caso $x = 0$.

14.- Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sucesiones de Cauchy de elementos de un cuerpo ordenado arquimediano y consideremos

$$Z_n = \frac{X_n + (n+1) Y_n}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

a) Demostrar que la sucesión $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es de Cauchy.

b) Demostrar que si $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente entonces lo es, asímismo, la sucesión $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ¿Qué relación existe entre los respectivos límites? .

15.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de Cauchy de elementos de un cuerpo ordenado $(K, +, \cdot, \leqslant)$ tal que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \in K^+ \wedge a_{n+2} = a_n + a_{n+1})$. Demostrar que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n = 0)$.

Indicación: Pruébese que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente a cero y, además, creciente.

16.- Si E es un conjunto, f una aplicación de E en E y A un subconjunto de E entonces diremos que A es invariante por f sí y sólo sí $f(A) = A$. Sea $B = \{x \in E$: Existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in S(E)$ verificando $x_1 =$

$= x \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(x_{n+1}) = x_n) \}$.

Demostrar que B es el mayor (por la relación de inclusión) subconjunto de E invariante por f.

17.- Demostrar la existencia de una ordenación total en $\mathbb{N}$ respecto de la cual cada número natural carece de elemento siguiente.

Indicación: Téngase presente que Q es equipotente a $\mathbb{N}$ y que respecto de la ordenación usual ningún número racional posee siguiente.

18.- Sea A un conjunto que posee, al menos, dos elementos. Demostrar que son equivalentes las proposiciones:

i) A es un conjunto infinito.
ii) Existe una ordenación total $\leqslant$ en A respecto de la cual cada elemento de A carece de elemento siguiente.

Indicación:
i) $\Rightarrow$ ii). Si A es un conjunto infinito considérese una partición $\{A_i\}_{i \in I}$ de A tal que $(\forall i)(i \in I \Rightarrow A_i$ es infinito numerable). Para cada $i \in I$ sea f_i una aplicación biyectiva de Q en A_i y $\leqslant_i$ la ordenación transportada de la usual de Q por f_i a A_i. Finalmente, considérese una buena ordenación R del conjunto I y defínase una ordenación en A asociada a R y a las $\leqslant_i$.

ii) $\Rightarrow$ i). Si $(A, \leqslant)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado y a=mín A considérese $B_a = \{x : x \in A \wedge a < x\}$ para probar que b=mín B es el siguiente de a.

19.- Sea A un conjunto no vacío. Demostrar que son equivalentes las proporciones:

i) A es un conjunto infinito.

ii) Existe una ordenación total $\leqslant$ en A respecto de la cual $(A, \leqslant)$ es denso, carece de elemento máximo y de elemento mínimo.

Indicación:

i) $\Rightarrow$ ii). Sígase una línea análoga a la del problema anterior (en la misma implicación), observando que respecto de la ordenación usual Q es denso, carece de elemento máximo y de elemento mínimo.

ii) $\Rightarrow$ i). Obsérvese que si en un conjunto no vacío A existe una ordenación total respecto de la cual carece de máximo y de mínimo, entonces A es un conjunto no finito.

9

EL CUERPO $\mathbb{R}$ DE LOS NUMEROS REALES

§1. EL CUERPO $\mathbb{R}$ DE LOS NUMEROS REALES

Definición: El cuerpo ordenado arquimediano y completo $(\tilde{Q},+,\cdot,\leqslant)$, lo denominaremos cuerpo de los números reales y lo notaremos por $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$. A los elementos de $\mathbb{R}$ les llamaremos números reales. El objetivo fundamental del presente capítulo radica en la obtención de caracterizaciones, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, del cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ de los números reales.

En primer lugar, vamos a probar que el cuerpo de los números reales es el único cuerpo ordenado arquimediano y completo que existe, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados.

Teorema 1

Si $(K_1,+,\cdot,\leqslant)$ y $(K_2,+,\cdot,\leqslant)$ son cuerpos ordenados arquimedianos y completos, entonces existe un único isomorfismo de cuerpos ordenados entre ellos.

Demostración:

Para evitar confusionismo notaremos por Q_1 el conjunto de elementos racionales de K_1 y por Q_2 el de elementos racionales de K_2. Si $x \in K_1$, por ser $(K_1,+,.,\leqslant)$ arquimediano, existirá una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(Q_1)$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en K_1 a x; es decir, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ será una sucesión de Cauchy en K_1, luego lo será, asímismo, en Q_1 y, por tanto, en Q_2. Ahora bien, puesto que $(K_2,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ será de Cauchy en K_2, y de la completitud de $(K_2,+,\cdot,\leqslant)$ deducimos la existencia de un elemento $\hat{x}\in K_2$ tal que, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en K_2 a $\hat{x}\in K_2$. El proceso anteriormente considerado, nos permite definir una aplicación $\varphi \in \mathcal{F}(K_1;K_2)$ así: $\varphi(x) = \hat{x}$ $(\forall x \in K_1)$. No obstante, hemos de justificar esta definición, en el sentido de que el elemento $\hat{x}\in K_2$ depende únicamente de $x\in K_1$ y no de la sucesión auxiliar $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de racionales considerada; justificación que es consecuencia del siguiente lema:

Lema 1.

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(Q_1)$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(Q_1)$ son sucesiones que convergen en K_1 a $x\in K_1$, entonces dichas sucesiones, consideradas como de elementos de Q_2, convergen en K_2 a $\hat{x}\in K_2$.

En efecto: Observemos que toda sucesión de elementos de Q_1 convergente en K_1, es también convergente en K_2 al considerarla como sucesión de elementos de Q_2 (si bien, entre los respectivos límites no tiene porqué existir, a priori, relación alguna).

En tal situación, se verifica:

$$[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{K_1} x \,,\, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{K_1} x] \Rightarrow [\{x_n-y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{K_1} 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\{x_n-y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{Q_1} 0] \Rightarrow [x_n-y_n \quad n\in\mathbb{N}^* \xrightarrow{Q_2} 0] \Rightarrow [\{x_n-y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{K_2} 0]$$

y teniendo presente que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

son convergentes en K_2, concluimos que sus límites en K_2 coinciden.

□

Resultará entonces que $\varphi(x) = x$ para cada $x \in Q_1$, ya que la sucesión constante $\{x\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en K_1 a $x \in K_1$, luego considerada en K_2 será, igualmente, convergente a $x \in K_2$; es decir $x = \hat{x}$. Así pues, la aplicación restricción $\varphi|_{Q_1}$ establecerá un isomorfismo de cuerpos ordenados entre los respectivos cuerpos racionales de K_1 y K_2.

Téngase, además, presente que si $x \in K_1$ es un elemento tal que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(Q_1)$ converge en K_1 a $x \in K_1$, entonces se verifica:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} x_n\right) = \hat{x} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ K_2}} \varphi(x_n).$$

Lema 2:

La aplicación φ es un morfismo de cuerpo de $(K_1,+,\cdot)$ en $(K_2,+,\cdot)$.

En efecto: sean $x \in K_1, y \in K_1$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(Q_1)$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(Q_1)$ tales que $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} x_n = x$ y $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} y_n = y$. En tal situación obtenemos:

$$\varphi(x+y) = \varphi\left[\lim_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} x_n + \lim_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} y_n\right] = \varphi\left[\lim_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} (x_n+y_n)\right] =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ K_2}} \varphi(x_n + y_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ K_2}} \left[\varphi(x_n) + \varphi(y_n)\right] =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ K_2}} \varphi(x_n) + \lim_{\substack{n\to\infty \\ K_2}} \varphi(y_n) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Análogamente resulta $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$.

□

Lema 3:

La aplicación φ es un morfismo de orden inyectivo de $(K_1,\leqslant)$ en $(K_2,\leqslant)$.

En efecto: si $x \in K_1^+ - \{0\}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in S(Q_1)$ tal que $\lim_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} x_n = x$.

Ahora bien, dicha sucesión al ser convergente en K_1 será de Cauchy en K_1 y por tanto en Q_1; puesto que $x \in K_1^+ - \{0\}$ concluímos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in C(Q_1)$ es estrictamente positiva, luego existirán $A \in Q_1^+ - \{0\}$ y $n_o \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow x_n > A)$$

Teniendo en cuenta que $\varphi_{|Q_1}$ es un isomorfismo de orden se verificará, para cada natural n $(n \geqslant n_o)$: $\varphi(x_n) > \varphi(A)$, luego

$$\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} x_n\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ K_2}} \varphi(x_n) \geqslant \varphi(A) > 0$$

de donde se deduce, trivialmente, que φ es un morfismo de orden inyectivo.

□

Lema 4:

La aplicación $\varphi \in \mathcal{F}(K_1; K_2)$ es epiyectiva.

En efecto: basta tener presente que, como vamos a demostrar, el proceso que nos permitió definir la aplicación φ es reversible.

Si $x \in K_2$, al ser $(K_2, +, ., \leqslant)$ arquimediano existirá $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in S(Q_2)$ tal que $\lim_{\substack{n\to\infty \\ K_2}} x_n = x$, luego $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ será de Cauchy en K_2 y por tanto en Q_2 y Q_1. Además será de Cauchy en K_1 por ser arquimediano dicho cuerpo. Finalmente, de la completitud de $(K_1, +, ., \leqslant)$ deducimos la existencia de $y \in K_1$ verificando $\lim_{\substack{n\to\infty \\ K_1}} x_n = y$, de donde concluimos $\varphi(y) = \hat{y} = x$.

□

Resumiendo, hemos probado la existencia de un isomorfismo de cuerpos ordenados entre $(K_1, +, ., \leqslant)$ y $(K_2, +, ., \leqslant)$; probemos, finalmente, la unicidad del tal isomorfismo. Sea $\psi \in \mathcal{F}(K_1 ; K_2)$ un isomorfismo de cuerpos ordenados entre $(K_1, +, ., \leqslant)$ y $(K_2, +, ., \leqslant)$;

veamos, en primer lugar, que $\psi_{|Q_1} \in F(Q_1, Q_2)$ es la aplicación identidad (considerando identificados Q_1 y Q_2): en efecto, al ser ψ morfismo de cuerpo se verificará

$$\psi(0) = 0\ ;\ \psi(1) = 1\ ;\ \psi(n) = n\cdot\psi(1) = n\ \ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \psi(-n) = -n\ \ (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

Además:

$$1 = \psi(1) = \psi(n\cdot\frac{1}{n}) = \psi(n)\cdot\psi(\frac{1}{n})\quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

luego $\psi(1/n) = 1/\psi(n)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, de donde resultará $\psi(-\frac{1}{n}) = -1/\psi(n)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y, por tanto, para cada $m/n \in Q_1$ obtendremos $\psi(m/n) = m\cdot\psi(1/n) = m/n$.

Una vez visto que $\psi_{|Q_1}$ es la aplicación identidad, veamos que $(\forall x)\ (x\in K_1 \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x))$. Supongamos lo contrario, es decir que exista $x\in K_1$ tal que $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Si $\varphi(x) < \psi(x)$ de la densidad de Q_2 en $(K_2, \leqslant)$ resultará la existencia de un elemento $z\in Q_2$ tal que $\varphi(x) < z < \psi(x)$, es decir $\varphi(x) < z = \varphi(z) = \psi(z) < \psi(x)$; por ser φ y ψ morfismos de orden, de las relaciones $\varphi(x) < \varphi(z)$ y $\psi(z) < \psi(x)$ deducimos $x < z$ y $z < x$, lo que es una contradicción. A una contradicción similar llegaríamos bajo el supuesto $\psi(x) < \varphi(x)$. Conclusión: $\varphi = \psi$, lo que completa la demostración del teorema.

□

Corolario

Salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, el único cuerpo ordenado arquimediano y completo que existe es el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ de los números reales.

□

En el capítulo VIII (§2) habíamos visto que el cuerpo ordenado $(Q, +, \cdot, \leqslant)$ es, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, el mínimo cuerpo ordenado arquimediano, por la relación de inclusión; en el sentido de que todo cuerpo ordenado arquimediano contiene a $(Q, +, \cdot, \leqslant$ como subcuerpo ordenado. Pues bien, pretendemos, a continuación de-

mostrar que el cuerpo ordenado $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ es, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, el máximo cuerpo ordenado arquimediano, por la relación de inclusión; en el sentido de que todo cuerpo ordenado arquimediano posee una extensión ordenada isomorfa, como cuerpo ordenado, a $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$.

Definición:

Diremos que un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es universalmente arquimediano sí y sólo sí es arquimediano y, además, para cada cuerpo ordenado arquimediano $(K',+,\cdot,\leqslant)$ existe un único monomorfismo de cuerpos ordenados $f \in \mathcal{F}(K';K)$ tal que $i_1=f\circ i_2$, siendo i_1 e i_2 las respectivas inmersiones canónicas de $\mathbb{Q}$ en K y K'.

Teorema 2

Un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es universalmente arquimediano sí y sólo sí es arquimediano y completo.

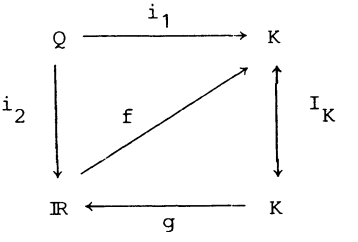
Demostración:

Supongamos, en primer lugar, que $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y completo y sea $(K',+,\cdot,\leqslant)$ un cuerpo ordenado arquimediano; del teorema 1 deducimos la existencia de un único isomorfismo de cuerpos ordenados f de $(\widetilde{K}',+,\cdot,\leqslant)$ en $(K,+,\cdot,\leqslant)$.

Si notamos i_1, i_2 e i_3 las inyecciones canónicas de $\mathbb{Q}$ en K, de $\mathbb{Q}$ en K' y de K' en $\widetilde{K}'$, respectivamente, resultará que la aplicación $g=f\circ i_3$ verifica $i_1=g\circ i_2$ y, obviamente, la tal aplicación g es la única que verifica dicha condición. Conclusión: $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo universalmente arquimediano.

Recíprocamente, supongamos que $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado universalmente arquimediano; puesto que $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano, existirá un único monomorfismo de cuerpos ordenados $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};K)$ tal que $i_1=f\circ i_2$, siendo i_1 e i_2 las inyecciones canónicas de $\mathbb{Q}$ en K y $\mathbb{R}$, respectivamente. Ahora bien, $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y completo, por tanto será universal-

mente arquimediano; luego existirá un único monomorfismo de cuerpos ordenados $g \in F(K;\mathbb{R})$ tal que $i_2 = g \circ i_1$. Así pues, será conmutativo el diagrama



y teniendo presente que $(f \circ g) \circ i_1 = i_1$ y que $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es universalmente arquimediano, deducimos $f \circ g = I_K$ luego f, y por tanto g, es un isomorfismo de cuerpos ordenados. Conclusión: $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es isomorfo, como cuerpo ordenado, a $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$. Es decir, el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano y completo.

□

Corolario

Salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, el único cuerpo ordenado universalmente arquimediano que existe es el cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ de los números reales.

□

Con esto completamos la demostración de que $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ es, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, el máximo cuerpo ordenado arquimediano, por la relación de inclusión.

Para finalizar el presente capítulo, vamos a obtener nuevas caracterizaciones, salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, de $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ en la clase cuyos elementos son los cuerpos ordenados.

Definición: Diremos que un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es de Dedekind (o verifica la "propiedad del supremo") sí y sólo sí todo subconjunto no vacio de K acotado superiormente en $(K,\leqslant)$, posee supremo en $(K,\leqslant)$.

Teorema 3

Un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es de Dedekind sí y sólo sí todo subconjunto no vacio de K acotado inferiormente en $(K,\leqslant)$, posee ínfimo en $(K,\leqslant)$.

Demostración:

Supongamos que el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es de Dedekind y sea A un subconjunto no vacio de K acotado inferiormente en $(K,\leqslant)$; consideremos

$$B = \{ x : (x\in K) \wedge (x \text{ es cota inferior de A en } (K,\leqslant))\}$$

Puesto que $A \neq \emptyset$ resulta que B es un subconjunto no vacio de K (por ser A acotado inferiormente) acotado superiormente en $(K,\leqslant)$ (cualquier elemento de A es cota superior de B), por tanto existirá $x = \sup B$. Veamos que $x = \text{ínf } A$; en efecto, para cada $y\in A$ obtendremos $x = \sup B \leqslant y$, es decir $x\in B$. Por otra parte, si $y\in K$ es cota inferior de A en $(K,\leqslant)$, entonces $y\in B$, luego $y\leqslant x$. Conclusión: $x = \text{ínf } A$.

Recíprocamente, supongamos que $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado tal que todo subconjunto no vacio acotado inferiormente en $(K,\leqslant)$ posee ínfimo en $(K,\leqslant)$, y sea A un subconjunto no vacio de K acotado superiormente en $(K,\leqslant)$; considerando el conjunto

$$B = \{ x : (x\in K) \wedge (x \text{ es cota superior de A en } (K,\leqslant))\}$$

y razonando análogamente a como lo hicimos anteriormente, obtenemos que el ínfimo del conjunto B en $(K,\leqslant)$ es el supremo de A en $(K,\leqslant)$. Por tanto, el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es de Dedekind.

□

Teorema 4

Un cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es de Dedekind sí y sólo sí es arquimediano y completo.

Demostración:

Si $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado de Dedekind, entonces de la proposición 5 (cap. VIII; §1; pág. 357) deducimos que $(K,\leqslant)$ es denso, del teorema 1 (cap. II; §3; pág. 127) que $(K,\leqslant)$ es contínuo, y de la proposición 2 (cap. VIII; §2; pág. 363) concluímos que el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano. Veamos que, además, es completo.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de Cauchy de elementos de K y notemos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{x_n\}$ (es decir, A es el subconjunto de K cuyos elementos son, precisamente, los términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$). Distingamos dos casos:

a) que A sea finito: en tal situación, existirá un elemento $x\in K$ tal que el conjunto $A_x = \{n : n\in\mathbb{N}^* \wedge x = x_n\}$ es infinito, luego $x\in K$ es un valor de adherencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ que, por ser de Cauchy, convergerá a $x\in K$.

b) que A sea infinito: en tal situación, para cada $x\in K$ notemos $B_x = \{y : (y\in A) \wedge (x<y)\}$ y designemos

$$B = \{x : (x\in K) \wedge (B_x \text{ es infinito})\};$$

puesto que A es infinito y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada, resultará que B es un subconjunto no vacio de K acotado superiormente; si $x = \sup B$ vamos a ver que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a x. En efecto, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$: $x + \frac{\varepsilon}{2}\notin B$ luego el conjunto $B_{x+\frac{\varepsilon}{2}}$ será finito mientras que, en cambio, $B_{x-\frac{\varepsilon}{2}}$ será infinito, ya que $x-\frac{\varepsilon}{2}<x$; por tanto, x será valor de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ que, por ser de Cauchy, convergerá a $x\in K$.

Conclusión: el cuerpo ordenado arquimediano $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es completo.

Recíprocamente, supongamos que el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano y completo; sea A un subconjunto no vacio de K acotado superiormente en $(K,\leqslant)$; notemos $B = \{x : (x\in K)\wedge(x \text{ es cota superior de A en } (K,\leqslant))\}$ y $C = K-B$. Puesto que $B\neq\emptyset$ y $B\neq K$ resulta que

$C \neq \emptyset$; además obviamente $B \cap C = \emptyset$ y $B \cup C = K$. Obsérvese que si $(x,y) \in C \times B$ entonces $x < y$ ya que, de lo contrario, existiría $z \in A$ verificando $y \leqslant x < z$, lo que implicaría $y \notin B$.

Consideremos la aplicación f de $C \times B$ en $C \times B$ definida así: para cada $(x,y) \in C \times B$:

$$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}\ ,\ y\right) \quad \text{si} \quad \frac{x+y}{2} \in C \quad \text{y} \quad f(x,y) = \left(x,\ \frac{x+y}{2}\right)$$

si $\frac{x+y}{2} \in B$. Aplicando el teorema 1 (cap. IV; §3; pág. 189) al esquema $[m=1;\ \alpha=(a_1,b_1) \in C \times B \neq \emptyset$ y $f \in F(C \times B\ ;\ C \times B)]$ deducimos la existencia de una única aplicación $g \in F(\mathbb{N}^*\ ;\ C \times B)$ verificando:

a) $g(1) = (a_1,b_1)$

b) $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow g(n+1) = f[g(n)])$.

Notemos, para cada $n \in \mathbb{N}^*$: $g(n) = (a_n,b_n)$ y consideremos las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de elementos de K. Puesto que $f(a_n,b_n) = (a_{n+1},b_{n+1})$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, teniendo presente la definición de f resulta inmediatamente que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es creciente, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente,

$$a_n < b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \text{y} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_1 - a_1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Lema:

Las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de elementos de K, anteriormente consideradas, son de Cauchy.

En efecto: por ser $(K, +, \cdot, \leqslant)$ arquimediano resulta que la sucesión $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a cero ya que $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Luego de la relación $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_1 - a_1)/2^n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ deducimos que la sucesión $\{b_n - a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a cero; por tanto, para cada $\varepsilon \in K^+ - \{0\}$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_{n_o} - a_{n_o} < \varepsilon$.

Ahora bien, si n y m son números naturales mayores o iguales que n_o obtendremos $(a_{n_o} \leqslant a_n < b_{n_o}) \wedge (a_{n_o} \leqslant a_m < b_{n_o})$ es decir $(a_{n_o} \leqslant a_n < b_{n_o}) \wedge (-b_{n_o} < -a_m \leqslant -a_{n_o})$, luego $-(b_{n_o} - a_{n_o}) < a_n - a_m < b_{n_o} - a_{n_o}$. En consecuencia $|a_n - a_m| < b_{n_o} - a_{n_o} < \varepsilon$, lo que demuestra que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es de Cauchy.

El razonamiento para la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es similar.

□

Teniendo presente que el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es completo, las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son convergentes y sus límites coinciden (ya que $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$). Sea $c=\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Veamos finalmente que $c=\sup A$. En efecto, para cada $x\in A$ se verifica $x\leqslant b_n$ $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ luego $x\leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = c$, es decir c es cota superior de A en $(K,\leqslant)$. Por otra parte, si $x\in B$ entonces $a_n < x\,(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ luego $c=\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant x$. Conclusión: $c = \sup A$.

□

Corolario

Salvo isomorfismos de cuerpos ordenados, el único cuerpo ordenado de Dedekind que existe es el cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ de los números reales.

□

PROBLEMAS

1.- Sean $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{Q}-\{0\}$. Demostrar que $a+b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ y $c \cdot b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

2.- Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a<b$.

a) Demostrar que el conjunto $]a,b[\cap \mathbb{Q}$ es infinito.

b) Demostrar que $[a,b]$ (respectivamente, $]a,b[$) es equipotente a $[0,1]$ (respectivamente, $]0,1[$).

c) Demostrar que $]0,1[$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

d) Demostrar que $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ es denso en $(\mathbb{R},\leqslant)$ y, además, equipotente a $\mathbb{R}$.

e) Demostrar que $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable.

Indicación: b) Considérese la aplicación $f \in F([0,1],[a,b])$ definida por $f(x)=a+(b-a)\cdot x$ $(\forall x \in [0,1])$.
c) Considérese la aplicación $f \in F(\mathbb{R}; [0,1]$ definida por $f(x)=(1+x/|x|)/2$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.
d) Para probar que $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ es equipotente a $\mathbb{R}$, tener presente el problema 17 del capítulo V.
e) Probar que $[0,1]$ es un conjunto no numerable.

3.- Supongamos $A \subset B \subset \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ y consideremos la siguiente proposición:

"Si $b \in B$ es una cota superior de A en $(\mathbb{R},\leqslant)$, entonces $\sup A \in B$"

Estudiar la veracidad o falsedad de dicha proposición en los siguientes casos:
a) $B = \mathbb{N}$ b) $B = \mathbb{Z}$ c) $B = \mathbb{Q}$ d) $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
e) $B = [a,b]$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a<b)$ f) $B =]a,b[$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a<b)$.

4.- Consideremos el conjunto

$$A_{\mathbb{Q}} = \{A : A \in P(\mathbb{Q}) - \{\emptyset, \mathbb{Q}\} \wedge A \text{ es segmento de } (\mathbb{Q},\leqslant) \wedge A \text{ carece de máximo en } (\mathbb{Q},\leqslant)\}$$

y notemos $A = \{x : x \in \mathbb{Q}^+ \wedge x^2 \leqslant 2\}$.

a) Demostrar que $A \cup \mathbb{Q}^- \in A_{\mathbb{Q}}$

b) Demostrar que $(A_{\mathbb{Q}}, \subset)$ es orden isomorfo a $(\mathbb{R},\leqslant)$.

Indicación: a) Tener presente el problema 10 del capítulo VII.
b) Considérese la aplicación $f \in F(A_{\mathbb{Q}}; \mathbb{R})$ definida por $f(A)=\alpha_A$, siendo α_A el supremo de A en $(\mathbb{R},\leqslant)$, y tener presente el problema 22 del capítulo II.

5.- Diremos que un número real a es algebraico sí y sólo sí existe $f \in Z[X]$ (problema 8 del capítulo VII) tal que

$$\sum_{k=0}^{n_f} f(k) \cdot a^k = 0 .$$

Demostrar que el conjunto $A=\{a: a\in\mathbb{R} \wedge a \text{ es algebraico}\}$ es infinito y numerable.

Indicación: Para cada $n\in\mathbb{N}$ considérese el conjunto

$$A_n = \{x: (x\in\mathbb{R}) \wedge (\exists f)\ (f\in Z[X] \wedge n_f = n \wedge \sum_{k=0}^{n_f} f(k)x^k = 0)\} ,$$

y obsérvese que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

6.- Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de subconjuntos no vacios de $\mathbb{R}$ tal que

$$(\forall n)\ (n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow A_n \subset A_{n+1}) ;$$

notemos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ y supongamos que A es un conjunto acotado en $(\mathbb{R},\leqslant)$.

a) Demostrar que, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, A_n es un conjunto acotado en $(\mathbb{R},\leqslant)$.

b) Si, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, notamos

$$a_n = \sup A_n \qquad \text{y} \qquad b_n = \text{ínf } A_n$$

demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \text{ínf } A$$

7.- Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de subconjuntos no vacios de $\mathbb{R}$ acotados superiormente en $(\mathbb{R},\leqslant)$, verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow A_n \subset A_{n+1})$. Para cada $n\in\mathbb{N}^*$ notemos $a_n = \sup A_n$.

a) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente sí y sólo sí el conjunto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ está acotado superiormente.

b) Demostrar que si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

c) Demostrar que si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y, además, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica $a_n \neq \sup A$, entonces $\sup A \notin A$.

8.- Demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un intervalo de $(\mathbb{R},\leqslant)$ sí y sólo sí para cada $x\in A$ e $y\in A$ se verifica $]x,y[\subset A$.

Indicación: Distíngase casos, según A esté o no acotado superior o inferiormente en $(\mathbb{R},\leqslant)$, y téngase presente que el cuerpo ordenado $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ es de Dedekind.

9.- Demostrar que para cada $x\in\mathbb{R}$ tal que $x\geqslant -1$ y cada $n\in\mathbb{N}^*$, se verifica $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Indicación: Utilizar el teorema de inducción completa.

10.- Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y acotados superiormente.

a) Demostrar que $A\cup B$ está acotado superiormente y, además,

$$\sup(A\cup B) = \sup(\{\sup A, \sup B\}).$$

b) Si notamos $A+B=\{x\in\mathbb{R} : (\exists y)(\exists z)(y\in A\wedge z\in B\wedge x=y+z)\}$, demostrar que A+B está acotado superiormente y, además,

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

c) Si $A\subset\mathbb{R}^+, B\subset\mathbb{R}^+$ y notamos $A\cdot B=\{x\in\mathbb{R} : (\exists y)(\exists z)(y\in A\wedge z\in B\wedge x=y.z)\}$, demostrar que $A\cdot B$ está acotado superiormente y, además,

$$\sup(A\cdot B) = (\sup A)\cdot(\sup B).$$

Indicación: c) Si $A\neq\{0\}$ y $B\neq\{0\}$ considérese para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ elementos $\alpha\in A$ y $\beta\in B$ tales que $\alpha>\sup A - \varepsilon/2\sup B\wedge\beta>\sup B-\varepsilon/2\sup A$, para concluir que $\sup(A\cdot B)\geqslant(\sup A)\cdot(\sup B)$.

11.- Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de intervalos abiertos (limitados o ilimitados) no vacíos de $(\mathbb{R},\leqslant)$ y disjuntos dos a dos (es decir, $(\forall i)(\forall j)(i\in I\wedge j\in J\wedge i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset)$. Demostrar que el conjunto de índices I es numerable.

Indicación: Considérese una función de elección φ sobre Q y la aplicación f de I en Q definida por $f(i)=\varphi(Q\cap A_i)$ $(\forall i\in I)$.

12.- Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es abierto sí y sólo sí para cada $x\in A$ existe $\gamma_x\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ tal que $]x-\gamma_x, x+\gamma_x[\subset A$. Demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es abierto sí y sólo sí A es reunión de una familia numerable de intervalos abiertos (limitados o ilimitados).

Indicación: Si A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ y $x\in A$ nótese $A_x=(\mathbb{R}-A)\cap(]x,\rightarrow[)$, $B_x=(\mathbb{R}-A)\cap(]\leftarrow,x[)$ y considérense α_x,β_x así: $\alpha_x=\leftarrow$ si $B_x=\emptyset$, $\alpha_x=\sup B_x$ si $B_x\neq\emptyset$, $\beta_x=\rightarrow$ sí $A_x=\emptyset$, $\beta_x=\inf A_x$ si $A_x\neq\emptyset$. Pruébese que $]\alpha_x,\beta_x[$ es el intervalo máximo (por la relación de inclusión) contenido en A al cual pertenece x. Finalmente, obsérvese que si $x\in A$ e $y\in A$ entonces $]\alpha_x,\beta_x[=]\alpha_y,\beta_y[\circ]\alpha_x,\beta_x[\cap]\alpha_y,\beta_y[=\emptyset$ y aplíquese el problema anterior.

13.- Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R}-A$ es un conjunto abierto. Demostrar que $A=\mathbb{R}\vee\mathbb{R}-A=\mathbb{R}$.

Indicación: Suponer $A \neq \mathbb{R} \wedge \mathbb{R}-A \neq \mathbb{R}$ y pruébese i) A no está acotado superiormente. ii) Si $x \in \mathbb{R}-A$ entonces el subconjunto $B_x = \{t \in A : x \leq t\}$ posee ínfimo (notémosle por β) tal que $\beta > x$. iii) $\beta \notin \mathbb{R}-A \wedge \beta \notin A$.

14.- Sea E un conjunto y f una aplicación de E en $\mathbb{R}$ tal que "para toda aplicación inyectiva g de $\mathbb{N}^*$ en E, la sucesión $\{f(g(n))\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ admite una sucesión parcial convergente a cero en $\mathbb{R}$". Demostrar que el conjunto $A=\{x \in E : f(x) \neq 0\}$ es numerable.

Indicación: Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ considérese $A_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$ y $B_n = \{x \in E : f(x) < -1/n\}$. Pruébese, por reducción al absurdo, que

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow A_n \text{ y } B_n \text{ son conjuntos finitos}).$$

10

SUCESIONES DE NUMEROS REALES

§1. TEOREMA DE LOS INTERVALOS ENCAJADOS Y DE EXISTENCIA DE LA RAIZ N-ESIMA DE UN NUMERO REAL ESTRICTAMENTE POSITIVO

Teniendo presente que $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y completo resultará que, para las sucesiones de números reales serán válidos todos los resultados obtenidos para sucesiones en dichos cuerpos ordenados. En particular, recordemos que los conjuntos $C^*(\mathbb{R})$ y $C(\mathbb{R})$ de sucesiones convergentes y de Cauchy, respectivamente, de números reales, coinciden debido a la completitud de $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ y, además, constituyen una subálgebra unitaria y conmutativa de $(S(\mathbb{R}),+,\cdot)$, respecto de las operaciones usuales, cuyos elementos invertibles son las sucesiones de números reales que poseen todos sus términos distintos de cero y no convergen a cero. A continuación estudiaremos unas propiedades específicas de las sucesiones de números reales, es decir, peculiares de las sucesiones de elementos de un cuerpo ordenado arquimediano y completo; que nos permitirá abordar los teoremas centrales del presente parágrafo.

Proposición 1

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es una sucesión creciente (respectivamente, decreciente) de números reales y acotada superiormente (respectivamente, inferiormente), entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente.

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es una sucesión creciente acotada superiormente, entonces el conjunto $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{x_n\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Luego, por ser $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ cuerpo ordenado de Dedekind, existirá $x=\sup A$; veamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a x. En efecto, de la proposición 6 (cap. VIII;§1; pág. 357) deducimos para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$, la existencia de un elemento $y\in A$ tal que $x-\varepsilon<y\leqslant x$. Por tanto si $n_o\in\mathbb{N}^*$ verifica $y=x_{n_o}$, entonces teniendo presente que $x\in\mathbb{R}$ es cota superior de A y que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente, resultará

$$(\forall n)\ (n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x-\varepsilon < x_{n_o}\leqslant x_n\leqslant x).$$

Es decir $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow |x_n-x|<\varepsilon)$.

Si, en cambio, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ fuese decreciente y acotada inferiormente bastará aplicar el resultado anterior a la sucesión $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y observar que si $\lim_{n\to\infty}(-x_n)=y$ entonces $\lim_{n\to\infty}x_n=-y$.

□

Corolario

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ es una sucesión de números reales monótona y acotada entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente; en particular, una sucesión monótona de números reales es convergente sí y sólo sí está acotada.

□

Teorema de los intervalos encajados

Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de intervalos cerrados de $(\mathbb{R},\leqslant)$ tales que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow I_{n+1}\subset I_n)$ (por verificar esta condición, dire-

mos que dicha sucesión es de intervalos cerrados encajados). Si, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ notamos $I_n=[a_n,b_n]$, entonces se verifica:

a) las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son convergentes.

b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = [a,b]$, siendo $a=\lim_{n\to\infty} a_n$ y $b=\lim_{n\to\infty} b_n$.

Demostración:

a) Teniendo presente que la sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifica $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow I_{n+1}\subset I_n)$ resultará que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente; además, ambas sucesiones están acotadas, concretamente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente por cualquier término de $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada inferiormente por cualquier término de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Del corolario anterior deducimos que dichas sucesiones son convergentes. Notemos $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

b) Veamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = [a,b]$; en efecto, si $x\in\mathbb{R}-[a,b]$ entonces resultaría $(x\in\mathbb{R})\wedge(x<a \vee x>b)$ luego, o bien $(x\in\mathbb{R})\wedge(x<a)$ en cuyo caso, dado $\varepsilon=a-x>0$ existiría $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $x=a-\varepsilon<a_{n_o}\leqslant a$ de donde deduciríamos $x\in\mathbb{R}-\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$; o bien $(x\in\mathbb{R})\wedge(x>b)$ en cuyo caso, dado $\varepsilon=x-b>0$ existiría $n_1\in\mathbb{N}^*$ tal que $b\leqslant b_{n_1}<b+\varepsilon=x$ y, por tanto, $x\in\mathbb{R}-\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. Conclusión: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\subset[a,b]$. Recíprocamente, si $x\in[a,b]$ y $n\in\mathbb{N}^*$, se verifica $a_n\leqslant a\leqslant x\leqslant b\leqslant b_n$ luego

$$(\forall n)\ (n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x\in I_n)$$

Es decir $[a,b]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$.

□

Corolario

Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de intervalos cerrados encajados de $(\mathbb{R},\leqslant)$. Si notamos, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=[a_n,b_n]$ y suponemos que $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, entonces existe un número real a tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n=\{a\}$.

En efecto: basta tener presente que, al ser convergentes las

sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, y verificarse $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, concluimos $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$.

□

Así resulta que el teorema de los intervalos encajados será válido en todo cuerpo ordenado arquimediano y completo, por ser isomorfo, como cuerpo ordenado, a $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$. Pues bien, a continuación vamos a demostrar una especie de recíproco, en el sentido de que la validez del teorema de los intervalos encajados en un cuerpo ordenado arquimediano, implica su completitud.

Proposición 2

Si $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano en el que es válido el teorema de los intervalos encajados, entonces es completo.

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de Cauchy de elementos de K; notemos, para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ y $n\in\mathbb{N}$:

$$A(\varepsilon,n) = \{\gamma : (\gamma\in\mathbb{N}^*)\wedge(\gamma>n)\wedge((\forall p)(\forall q)(p\in\mathbb{N}^*\wedge q\in\mathbb{N}^*\wedge p\geqslant\gamma\wedge q\geqslant\gamma\Rightarrow|x_p-x_q|<\varepsilon))\}.$$

Obsérvese que $A(\varepsilon,n)\neq\emptyset(\forall\varepsilon\in K^+-\{0\}$ y $\forall n\in\mathbb{N})$ ya que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in C(K)$. Sea $\alpha_1=\text{mín } A(1/2^2,0)$ y consideremos la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}^*-\{1\},\leqslant)$ en $\mathbb{N}^*$ definida así: si $\varphi\in F(S(n);\mathbb{N}^*)(n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$ entonces $H(\varphi)=\text{mín } A(1/2^{n+1},\varphi(n-1))$. Del corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (cap.II;§5 ; pág. 149) deducimos la existencia de una única aplicación $f\in F(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ verificando:

a) $f(1)=\alpha_1$

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow f(n+1)=H(f_{|S(n+1)})=\text{mín } A(1/2^{n+2},f(n)))$.

Por tanto, si notamos $f(n)=\alpha_n(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ resultará $\alpha_{n+1}=\text{mín } A(1/2^{n+2},\alpha_n)$; es decir $\alpha_{n+1}>\alpha_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y

$$(\forall p)(\forall q)(p\in\mathbb{N}^*\wedge q\in\mathbb{N}^*\wedge p\geqslant\alpha_{n+1}\wedge q\geqslant\alpha_{n+1}\Rightarrow|x_p-x_q|<1/2^{n+2}).$$

Sea $a_n=x_{\alpha_n} - 1/2^n$ y $b_n=x_{\alpha_n} + 1/2^n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y consideremos $I_n=[a_n,b_n]$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; obsérvese que, para cada $p\in\mathbb{N}^*(p\geqslant\alpha_n)$, se verifica $x_p\in I_n$.

Lema: $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de intervalos encajados de $(K,\leqslant)$ tal que $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

En efecto: puesto que $\alpha_{n+1}>\alpha_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ deducimos $|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}| < 1/2^{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; por tanto, si $y\in I_{n+1}$ resulta $|y-x_{\alpha_{n+1}}| \leqslant 1/2^{n+1}$, luego

$$|y-x_{\alpha_n}| \leqslant |y-x_{\alpha_{n+1}}| + |x_{\alpha_{n+1}}-x_{\alpha_n}| < 1/2^{n+1} + 1/2^{n+1} = 1/2^n,$$

lo que implica $y\in I_n$; es decir $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow I_{n+1}\in I_n)$. Por otra parte, teniendo presente que $b_n-a_n=2\cdot 1/2^n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y que el cuerpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ es arquimediano, concluimos $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 2\cdot 1/2^n = 0$.

□

Del corolario del teorema de los intervalos encajados deducimos la existencia de un elemento $x\in K$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n=\{x\}$. Veamos finalmente que $\lim_{n\to\infty} x_n=x$: para cada $\varepsilon\in K^+-\{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando $1/2^{n_o} < \varepsilon$, luego para cada natural p $(p\geqslant\alpha_{n_o})$ resultará $x_p\in I_{n_o}$; por tanto

$$(\forall p)(p\in\mathbb{N}^*\wedge p\geqslant\alpha_{n_o} \Rightarrow |x_p-x| \leqslant 1/2^{n_o} < \varepsilon).$$

□

Teorema de existencia de la raíz n-ésima de un número real estrictamente positivo

Si $a\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ y $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, entonces existe un único número real $b\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ tal que $b^n=a$.

Demostración:

En primer lugar estableceremos la unicidad del número real $b\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ tal que $b^n=a$.

Si $n=1$ la unicidad es trivial. Supongamos que $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ y sean

b,c números reales estrictamente positivos verificando $b^n=a$ y $c^n=a$. Teniendo presente las relaciones:

$$b^n-c^n = (b-c)\cdot(b^{n-1}+b^{n-2}\cdot c+\ldots+b\cdot c^{n-2}+c^{n-1})$$

$$b^{n-1}+b^{n-2}\cdot c+\ldots+b\cdot c^{n-2}+c^{n-1} \in \mathbb{R}^+-\{0\}$$

concluimos $b-c=0$, es decir $b=c$.

Para establecer la existencia de un número real $b\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ tal que $b^n=a$, consideramos los conjuntos

$$A = \{x\in\mathbb{R}^+-\{0\} : x^n\leqslant a\} \qquad y \qquad B = \{x\in\mathbb{R}^+-\{0\} : x^n>a\}.$$

Téngase presente que:

i) $A\neq\emptyset$ ya que la sucesión $\{1/K\}_{K\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a cero.
ii) $B\neq\emptyset$ ya que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente en $(\mathbb{R},\leqslant)$.
iii) Si $x\in A$ e $y\in B$ entonces $x<y$ (ya que $x^n\leqslant a<y^n$).

Consideremos la aplicación f de A×B en A×B definida así: para cada $(x,y)\in A\times B$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, \frac{x+y}{2}) & \text{si } \frac{x+y}{2}\in B \\ (\frac{x+y}{2}, y) & \text{si } \frac{x+y}{2}\notin B \end{cases}$$

La aplicación f está, efectivamente, definida entre A×B y A×B ya que si $(x,y)\in A\times B$ entonces $x+y/2\in\mathbb{R}^+-\{0\} = A\cup B$.

Del teorema 1 (cap.IV;§3;pág. 189) aplicado al esquema : [m = 1 ; $\alpha = (x_1,y_1)\in A\times B$; $f\in F(A\times B;A\times B)$], deducimos la existencia de una única aplicación $g\in F(\mathbb{N}^*;A\times B)$ verificando:

a) $g(1) = \alpha = (x_1,y_1)$
b) $(\forall k)(k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow g(k+1) = f[g(k)])$.

Si notamos $g(k)=(x_k,y_k)\wedge I_k = [x_k,y_k]$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$, entonces de la definición de f resulta

$$x_k^n\leqslant a<y_k^n\wedge y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{y_1-x_1}{2^k} \quad (\forall k\in\mathbb{N}^*) ;$$

en consecuencia $|I_k|_{k\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados de $(\mathbb{R},\leqslant)$ tal que $\lim_{k\to\infty}(y_k-x_k) = \lim_{k\to\infty}(y_1-x_1)/2^{k-1} = 0$. Por tanto, existirá un número real $b\in\mathbb{R}^+$ tal que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} I_k = |b|$. Más aún, en tal situación se verifica $b=\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k$; por tanto $b^n = \lim_{k\to\infty} x_k^n = \lim_{k\to\infty} y_k^n$. Finalmente, teniendo presente que $x_k^n \leqslant a < y_k^n$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ concluimos $b^n=a$, lo cual establece la existencia de un número real $b\in\mathbb{R}^+-|0|$ verificando $b^n=a$.

□

Definición: Si $a\in\mathbb{R}^+-|0|$ y $n\in\mathbb{N}-|0|$ entonces el único número real $b\in\mathbb{R}^+-|0|$ tal que $b^n=a$, recibe el nombre de "raiz n-ésima de a" y lo notaremos así: $b = \sqrt[n]{a}$. Convendremos, asímismo, en notar

$$\sqrt[n]{0} = 0 \quad \text{y} \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} \quad (\forall x\in\mathbb{R}^+).$$

§2. TEOREMA DE TOEPLITZ

En el presente parágrafo vamos a abordar un teorema (debido a Toeplitz) de especial importancia para el estudio de sucesiones convergentes (teorema de la media), cálculo práctico de límite (criterio de Stolz), análisis de divergencia "más o menos rápida" de series de números reales y obtención de condiciones suficientes para la convergencia del producto de Cauchy de series (teorema de Maertens).

En todo este parágrafo notaremos

$$A = |(x,y) \quad : (x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \wedge x\geqslant y|$$

Teorema de Toeplitz

Sea f una aplicación de A en $\mathbb{R}$ y notemos, para cada $(n,k)\in A$: $f(n,k) = x_{nk}$ Supongamos que se verifican las condiciones siguientes:

a) Para cada $k\in\mathbb{N}^*$ la sucesión $|x_{nk}|_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero.
b) Existe $M\in\mathbb{R}^+-|0|$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_{nk}| < M)$.
c) La sucesión $|x_n|_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $x_n = \sum_{k=1}^{n} x_{nk}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ es convergente, y notaremos su límite por x.

En tal situación, si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ es una sucesión convergente a $y\in\mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $z_n=\sum_{k=1}^{n}x_{nk}\,y_k$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ es convergente y su límite es $x\cdot y\in\mathbb{R}$.

Demostración:

Si notamos $t_n=y_n-y$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ obtenemos

$$z_n=\sum_{k=1}^{n}x_{nk}y_k=\sum_{k=1}^{n}x_{nk}(t_k+y)=\sum_{k=1}^{n}x_{nk}t_k+y\sum_{k=1}^{n}x_{nk}=\sum_{k=1}^{n}x_{nk}t_k+y\cdot x_n.$$

En consecuencia, demostrar que la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite es $x.y$, se reduce a probar que la sucesión $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $V_n=\sum_{k=1}^{n}x_{nk}t_k$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ es convergente y su límite vale cero.

Puesto que $\lim_{n\to\infty}t_n=0$ resulta

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}\quad\exists n_o\in\mathbb{N}^*\ (\text{supongamos } n_o>1):\ |t_k|<\varepsilon/2M\ (\forall k\geqslant n_o).$$

Teniendo presente que si $n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o$ entonces

$$|V_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}x_{nk}\cdot t_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n_o-1}|x_{nk}|\cdot|t_k|+\sum_{k=n_o}^{n}|x_{nk}|\cdot|t_k|$$

resulta que probar $\lim_{n\to\infty}V_n=0$ se reduce a establecer que

$$\sum_{k=1}^{n_o-1}|x_{nk}|\cdot|t_k|<\varepsilon/2\wedge\sum_{k=n_o}^{n}|x_{nk}|\cdot|t_k|<\varepsilon/2$$

a partir de un cierto lugar en adelante.

Por una parte, si $n\in\mathbb{N}^*$ y $n\geqslant n_o$ entonces

$$\sum_{k=n_o}^{n}|x_{nk}|\cdot|t_k|\leqslant\varepsilon/2M\sum_{k=n_o}^{n}|x_{nk}|\leqslant\varepsilon/2M\sum_{k=1}^{n}|x_{nk}|<\varepsilon/2M\cdot M=\varepsilon/2.$$

Por otra parte (para conseguir que $\sum_{k=1}^{n_o-1}|x_{nk}|\cdot|t_k|<\varepsilon/2$) consideramos $t=1+\max\{|t_1|,\ldots,|t_{n_o-1}|\}$.

Ahora bien:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_1} = 0 \Rightarrow \exists\, \nu_1 \in \mathbb{N}^* : |x_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{2t(n_o-1)} \qquad (\forall n \geqslant \nu_1)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_2} = 0 \Rightarrow \exists\, \nu_2 \in \mathbb{N}^* : |x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2t\cdot(n_o-1)} \qquad (\forall n \geqslant \nu_2)$$

. . . . . .

$$\lim_{n\to\infty} x_{n(n_o-1)} = 0 \Rightarrow \exists\, \nu_{n_o-1} \in \mathbb{N}^* : |x_{n(n_o-1)}| < \frac{\varepsilon}{2\cdot t\cdot(n_o-1)} \qquad (\forall n \geqslant \nu_{n_o-1})$$

Luego, si notamos $n_1 = \max\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n_o-1}\}$ deducimos

$$|x_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2t(n_o-1)} \qquad (\forall\, n \geqslant n_1 \wedge 1 \leqslant k \leqslant n_o-1)\,.$$

En consecuencia

$$\sum_{k=1}^{n_o-1} |x_{nk}| \cdot |t_k| \leqslant t \cdot \sum_{k=1}^{n_o-1} |x_{nk}| < t\cdot(n_o-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2t(n_o-1)} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n \geqslant n_1)$$

Finalmente, si $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$ obtenemos

$$|v_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n_o-1} |x_{nk}|\cdot|t_k| + \sum_{k=n_o}^{n} |x_{nk}|\cdot|t_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant n_2)\,.$$

Es decir: $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, lo que completa la demostración del teorema de Toeplitz.

□

Comentario a las hipótesis del teorema de Toeplitz

La aplicación f del teorema de Toeplitz suele "representarse" mediante el siguiente "esquema triangular infinito".

$$\begin{array}{llllll}
x_{11} & & & & & \\
x_{21} & x_{22} & & & & \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

de tal manera que las hipótesis del teorema pueden expresarse, en función del esquema anterior, de la siguiente forma:

a) Todas las columnas del esquema constituyen sucesiones convergentes a cero.
b) La sucesión cuyos elementos son las sumas de los valores absolutos de las filas, está acotada.
c) La sucesión cuyos elementos son las sumas de las filas, es convergente.

Variante del teorema de Toeplitz

En las hipótesis del teorema de Toeplitz, si se verifica además

d) Para cada $k\in\mathbb{N}^*$ la sucesión $\{x_{n(n+1-k)}\}_{n\in\mathbb{N}-\{1,\ldots,k-1\}}$ converge a cero (es decir, cada diagonal infinita del esquema constituye una sucesión convergente a cero).

En tales condiciones, si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $y\in\mathbb{R}$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $z\in\mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} x_{nk}\, y_k\, z_{n+1-k} \qquad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$$

es convergente a $x\cdot y\cdot z\in\mathbb{R}$.

Demostración:

Teniendo presente que $y_k z_{n+1-k}=(y_k-y)z_{n+1-k}+y\,z_{n+1-k}\ (\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ resulta

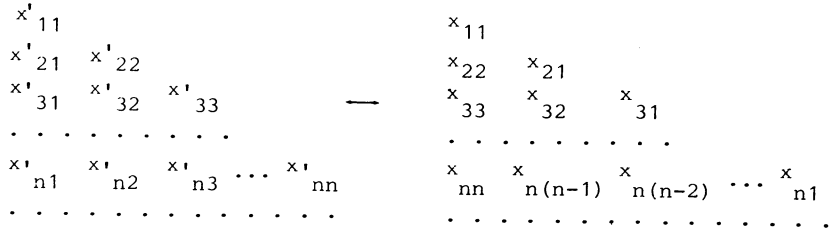
$$t_n = \sum_{k=1}^{n} x_{nk}\, z_{n+1-k}\,(y_k-y) + y\sum_{k=1}^{n} x_{nk}\, z_{n+1-k} \qquad (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

Aplicando el teorema de Toeplitz a la sucesión $\{z_{n+1-k}\cdot(y_k-y)\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ que converge a cero, deducimos que la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} x_{nk}z_{n+1-k}\cdot(y_k-y)\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero; es decir que

$$\lim_{n\to\infty}\ [t_n - y\sum_{k=1}^{n} x_{nk}\, z_{n+1-k}] = 0\,.$$

Consideremos la aplicación $g\in F(A;\mathbb{R})$ definida así: para cada $(n,k)\in A$: $g(n,k) = x_{n(n+1-k)}$ y notemos $x'_{nk}=g(n,k)$ $(\forall(n,k)\in A)$. El es-

quema asociado a la aplicación g es deducido del de f colocando las diagonales como columnas, así:



La aplicación g verifica las hipótesis del teorema de Toeplitz, ya que la condición a) para g se deduce de la hipótesis d); por tanto, concluimos que la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} x_{n(n+1-k)}\, z_k\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $x\cdot z$ y puesto que $\sum_{k=1}^{n} x_{nk}\, z_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} x_{n(n+1-k)}\, z_k$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ resulta, finalmente, que la sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $y\cdot x\cdot z$, lo que completa la demostración de la variante del teorema de Toeplitz.

□

Teorema de la media

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $y_n = 1/n \sum_{k=1}^{n} x_k$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ converge, asímismo, a $x\in\mathbb{R}$.

Demostración:

Consideremos la aplicación $f\in F(A;\mathbb{R})$ definida así: $f(n,k)=1/n$ $(\forall (n,k)\in A)$ cuyo esquema correspondiente será

1

1/2 1/2

1/3 1/3 1/3

. . . . . .

1/n 1/n 1/n . . 1/n

. . . . . .

Trivialmente, la aplicación f verifica las hipótesis del teorema de Toeplitz, luego si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $x\in\mathbb{R}$ con

cluimos que la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot 1/n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $x\in\mathbb{R}$ (obsérvese que la sucesión cuyos términos son las sumas de las columnas es $\{1\}_{n\in\mathbb{N}^*}$).

□

Nota: El teorema de la media puede demostrarse directamente sin necesidad de recurrir al teorema de Toeplitz (Problema 9).

§3. VALORES DE ADHERENCIA. LIMITE SUPERIOR E INFERIOR

Valores de adherencia de una sucesión de números reales

Recordemos que un número real x es un valor de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ sí y sólo sí existe una sucesión parcial $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente a x. Estudiaremos, a continuación, algunas cuestiones relacionadas con los valores de adherencia de una sucesión de números reales, estableciendo en primer lugar una condición suficiente, trivialmente no necesaria, para la existencia de valores de adherencia.

Proposición 1

Toda sucesión acotada de números reales posee, al menos, un valor de adherencia.

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ una sucesión acotada y consideremos el conjunto

$$A=\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\wedge(x\leq y)\wedge((\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(\exists n')(n\in\mathbb{N}^*\wedge n'\geq n\wedge x_{n'}\in[x,y])))\},$$

es decir A es el conjunto de pares ordenados de números reales tales que la primera componente es menor o igual que la segunda y, además, el intervalo cerrado de extremos dichas componentes contienen infinitos términos de la sucesión. Definimos la aplicación $f\in F(A;A)$ así:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, \frac{x+y}{2}) & \text{si} \quad (x, \frac{x+y}{2}) \in A \\ (\frac{x+y}{2}, y) & \text{si} \quad (x, \frac{x+y}{2}) \notin A \end{cases}$$

Téngase presente que si $(x, \frac{x+y}{2}) \notin A$ entonces $(\frac{x+y}{2}, y) \notin A$ luego la aplicación f está bien definida.

Sean $a_1 \in \mathbb{R}$ y $b_1 \in \mathbb{R}$ cotas inferior y superior, respectivamente, de $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x_n\}$; obviamente $(a_1, b_1) \in A$. Del teorema 1 (cap. 4; §3; pág. 189) aplicado al esquema $[m=1; \alpha = (a_1, b_1) \in A; f \in F(A;A)]$ deducimos la existencia de una única aplicación $g \in F(\mathbb{N}^*; A)$ verificando

a) $g(1) = \alpha = (a_1, b_1)$.

b) $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow g(n+1) = f[g(n)])$.

Si notamos $g(n) = (a_n, b_n) \wedge I_n = [a_n, b_n] \; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$, de la definición de f obtenemos

$$I_{n+1} \subset I_n \wedge b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_1 - a_1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Por tanto, aplicando el teorema de los intervalos encajados teniendo presente que $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, deducimos la existencia de un número real x tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{x\}$. Veamos que x es un valor de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$; en efecto, si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_{n_o} - a_{n_o} < \varepsilon$ y puesto que $x \in I_{n_o}$ se verificará $a_{n_o} \leqslant x \leqslant b_{n_o}$, de donde resulta $b_{n_o} < a_{n_o} + \varepsilon \leqslant x + \varepsilon$ y $a_{n_o} > b_{n_o} - \varepsilon \geqslant x - \varepsilon$; en consecuencia, $I_{n_o} \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Ahora bien $(a_{n_o}, b_{n_o}) \in A$ luego $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n' \in \mathbb{N}^* \wedge n' \geqslant n \wedge a_{n'} \in I_{n_o}))$. Por tanto, en I_{n_o} existen infinitos términos de la sucesión; es decir, el conjunto $A_\varepsilon = \{n : (n \in \mathbb{N}^*) \wedge (|x_n - x| < \varepsilon)\}$ es infinito. Así pues, teniendo presente que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ es un cuerpo ordenado arquimediano, del teorema 2 (cap. VIII; §3; pág. 382) deducimos que x es un valor de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

□

Trivialmente, una sucesión de números reales puede poseer valores de adherencia y, en cambio, no estar acotada; por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida por

$$x_{2k} = 1 \ (\forall K \in \mathbb{N}^*) \qquad y \qquad x_{2k-1} = 2k-1 \ \ (\forall K \in \mathbb{N}^*)$$

posee un único valor de adherencia (el 1) y, en cambio, no está acotada.

Proposición 2

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ está acotada, entonces el conjunto de valores de adherencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$ acotado en $(\mathbb{R},\leqslant)$.

Demostración:

Sean $M_1 \in \mathbb{R}$ y $M_2 \in \mathbb{R}$ cotas superior e inferior, respectivamente, del conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{x_n\}$ y notemos

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \text{ es valor de adherencia de } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\}$$

que, por la proposición anterior, será un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$.

Para cada $x \in A$ existirá una sucesión parcial $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Ahora bien, teniendo presente que

$$(\forall k)\ (k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow M_2 \leqslant x_{n_k} \leqslant M_1)$$

concluimos $M_2 \leqslant x \leqslant M_1$; es decir $A \in [M_2, M_1]$.

□

Obsérvese que una sucesión de números reales puede ser no acotada y, en cambio, ser acotado el conjunto de valores de adherencia, e incluso no vacio: considérese el ejemplo dado al final de la proposición 1.

Proposición 3

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ está acotada, entonces el conjunto de valores de adherencia posee máximo y mínimo en $(\mathbb{R},\leqslant)$.

Demostración:

Si notamos

$$A = \{x : x\in\mathbb{R} \wedge x \text{ es valor de adherencia de } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\}$$

deducimos de la proposición anterior que A es un subconjunto acotado no vacio de $\mathbb{R}$, por tanto existirán $x=\sup A$ e $y=\inf A$; veamos que $x\in A$ e $y\in A$.

Para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existe $z\in A$ tal que $x-\varepsilon<z\leqslant x$, y puesto que z es valor de adherencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dado $\varepsilon'=z-(x-\varepsilon)$ existirán infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ en el intervalo $]z-\varepsilon',z+\varepsilon'[$. Finalmente, teniendo presente que $]z-\varepsilon',z+\varepsilon'[\ \in\ ]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ concluimos $x\in A$. Mediante un razonamiento similar se prueba que $y\in A$.

□

Límite superior e inferior de una sucesión de números reales

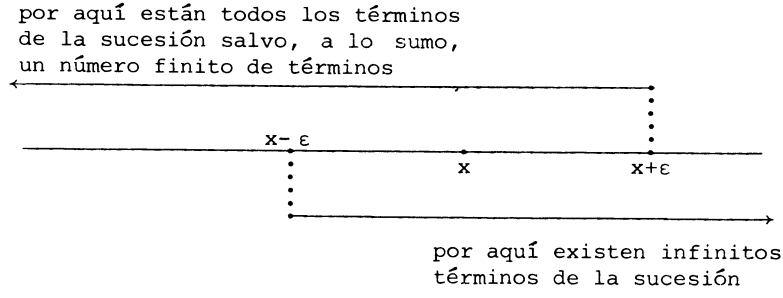
Definición:

Diremos que $x\in\mathbb{R}$ es el límite superior de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$, y lo notaremos $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n=x$, sí y sólo sí para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ se verifican las condiciones:

a) Existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n<x+\varepsilon)$.

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n'\in\mathbb{N}^*\wedge n'>n\wedge x_{n'}>x-\varepsilon))$.

Dicho de otra manera: $x\in\mathbb{R}$ es el límite superior de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ sí y sólo sí para cada intervalo abierto del tipo $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$, con $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$, todos los términos de la sucesión, salvo a lo sumo un número finito, están situados a la "izquierda" del extremo superior $x+\varepsilon$ y, en cambio, a la "derecha" de $x-\varepsilon$ existen infinitos términos de la sucesión (lo que, por supuesto, no implica que estos términos tengan que ser distintos entre sí). Podemos esquematizar la anterior definición del siguiente modo:



De la anterior definición resulta, inmediatamente, que si $x\in\mathbb{R}$ es el límite superior de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$, entonces x es un valor de adherencia de dicha sucesión, ya que para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ se verifica que en el intervalo abierto $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ existen infinitos términos de la sucesión.

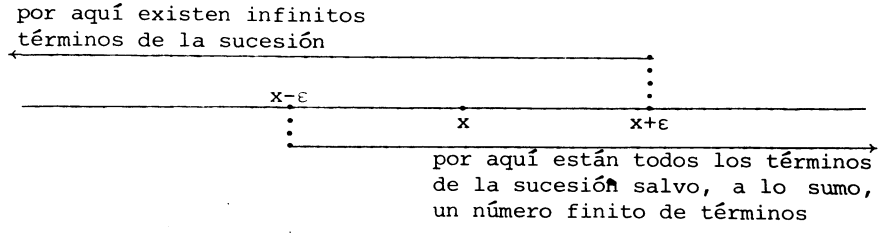
Definición:

Diremos que $x\in\mathbb{R}$ es el límite inferior de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$, y lo notaremos $\lim_{n\to\infty} x_n=x$, sí y sólo sí para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ se verifican las condiciones:

a) Existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geq n_o \Rightarrow x_n > x-\varepsilon)$.

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n'\in\mathbb{N}^*\wedge n'>n\wedge x_{n'}<x+\varepsilon))$.

Es decir, que en el caso del límite inferior, para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ todos los términos de la sucesión, salvo a lo sumo un número finito, están situados a la "derecha" de $x-\varepsilon$ y, en cambio, a la "izquierda" de $x+\varepsilon$ existen infinitos términos de la sucesión. Podemos esquematizar la anterior definición del siguiente modo:



Resulta, pues, que si $x\in\mathbb{R}$ es el límite inferior de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ entonces x es valor de adherencia de dicha sucesión, ya que para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existen infinitos términos de la sucesión en el intervalo abierto $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$.

Obsérvese que si $x=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ entonces para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ se verifican las condiciones:

a) Existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n<x+\varepsilon)$

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n'\in\mathbb{N}^*\wedge n'>n\wedge x_{n'}>x-\varepsilon)$,

de donde resulta

a) Existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow -x_n>-x-\varepsilon)$

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n'\in\mathbb{N}^*\wedge n'>n\wedge -x_{n'}<-x+\varepsilon)$

es decir $-x=\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)$.

Razonando análogamente obtenemos que si $x=\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ entonces $-x=\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)$.

Proposición 4

El límite superior de una sucesión de números reales (respectivamente, límite inferior) si existe, es único.

Demostración:

Supongamos $x=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$; sea $y\in\mathbb{R}-\{x\}$. Si se verificara $y<x$ e $y=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ dado $\varepsilon=(x-y)/2>0$ existiría $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n<y+\varepsilon)$ luego, teniendo presente que $]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\cap]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\neq\emptyset$ resultaría que en $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ existirían, a lo sumo, un número finito de términos de la sucesión; por tanto, x no sería valor de adherencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, lo cual contradice que $x=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

Si, en cambio, $x<y$ razonando como hemos hecho anteriormente, permutando formalmente x por y deducimos que $y\neq\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

□

Proposición 5

Si una sucesión de números reales posee límite superior (respectivamente, límite inferior), entonces está acotada superiormente (respectivamente, inferiormente).

Demostración:

Si $x=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ aplicando la definición a $\varepsilon=1$ deducimos la existencia de $n_o\in\mathbb{N}^*$ (que podemos suponer mayor que 1) tal que $(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n<x+1)$.

Si notamos $M=\max\{x_1,\ldots,x_{n_o-1}\ x+1\}$, entonces resulta $x_n\leqslant M(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente.

□

De la proposición anterior deducimos que una sucesión de números reales no acotada superiormente (respectivamente, inferiormente) carece de límite superior (respectivamente, límite inferior).

Proposición 6

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ posee límite superior e inferior, entonces se verifica $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

Demostración:

Para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existirán $n_o\in\mathbb{N}^*$ y $n_1\in\mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n<\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n+\frac{\varepsilon}{2})$$

y

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_1 \Rightarrow x_n>\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n-\frac{\varepsilon}{2})\cdot$$

Si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$ resultará $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n-\frac{\varepsilon}{2}<x_{n_2}<\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n+\frac{\varepsilon}{2}$.

Es decir, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ se verifica $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n < \varepsilon$, por tanto $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant 0$, luego $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

□

Proposición 7

Si $\{x_n\} \in S(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces son equivalentes las proposiciones:

a) $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

b) $x = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) : Trivial.

b) $\Rightarrow$ a) : Si $x = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ entonces para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existirán $n_o \in \mathbb{N}^*, n_1 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow x_n < x+\varepsilon) \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow x_n > x-\varepsilon).$$

Si notamos $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$ resultará

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_2 \Rightarrow x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon)$$

es decir

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_2 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$$

luego $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

□

Proposición 8

Una sucesión de números reales posee límite superior e inferior sí y sólo sí está acotada. Además, en tal situación el límite superior (respectivamente, límite inferior) coincide con el máximo (respectivamente, mínimo) del conjunto de valores de adherencia de la sucesión.

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ y notemos $A=\{x:x\in\mathbb{R}\wedge x$ es valor de adherencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\}$. Si existen $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ entonces de la proposición 5 deducimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión acotada.

Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada entonces de la proposición 3 deducimos la existencia de $x=\text{máx } A$ e $y=\text{mín } A$. Veamos que $x=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ e $y=\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n$; en efecto, observemos que si $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ entonces no pueden existir infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ mayores o iguales que $x+\varepsilon$ ya que, en tal situación, existiría una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente a un elemento del intervalo $[x+\varepsilon,M]$, donde M indica una cota superior de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{x_n\}$. Conclusión: para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n<x+\varepsilon)$$

y teniendo presente que $x\in A$ se verificará

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n'\in\mathbb{N}^*\wedge n'>n\wedge x_{n'}>x-\varepsilon)$$

de donde concluimos $x=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

Análogamente se demuestra que $y=\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

□

Obsérvese que si una sucesión de números reales posee límite superior (respectivamente, límite inferior) entonces el conjunto de valores de adherencia de dicha sucesión es no vacio y acotado superiormente (respectivamente, inferiormente); no obstante, una sucesión de números reales puede poseer un conjunto de valores de adherencia no vacio y acotado superiormente (respectivamente, inferiormente) y, en cambio, carecer de límite superior (respectivamente, límite inferior). En efecto, basta considerar una sucesión de números reales no acotada superiormente (respectivamente, inferiormente) y cuyo conjunto de valores de adherencia sea no vacio y acotado superiormente (respectivamente, inferiormente): véase el ejemplo dado al final de la proposición 1.

Proposición 9

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión acotada de números reales entonces se verifica:

a) $(\forall\lambda)(\lambda\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot x_n = \lambda\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n)$

b) $(\forall\lambda)(\lambda\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot x_n = \lambda\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n)$

c) $(\forall\lambda)(\lambda\in\mathbb{R}^- \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot x_n = \lambda\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n)$

d) $(\forall\lambda)(\lambda\in\mathbb{R}^- \Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot x_n = \lambda\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n)$

Demostración:

a) Si $\lambda=0$ la relación es trivial, y si $\lambda>0$ entonces basta tener presente que si notamos A y B los conjuntos de valores de adherencia de las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{\lambda\cdot x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, respectivamente, se verifica $A=\{x:(x\in\mathbb{R})\wedge(\lambda\cdot x\in B)\}$ y máx $B=\lambda\cdot$máx A.

b) Basta tener presente que si $\lambda\in\mathbb{R}^+$ entonces

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot(-x_n) = -\lambda\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\ (-x_n) = \lambda\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$$

c) Si $\lambda=0$ la relación es trivial y si $\lambda<0$ entonces basta tener presente que si notamos A y B los conjuntos de valores de adherencia de las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{\lambda\cdot x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, respectivamente, se verifica $A=\{x:(x\in\mathbb{R})\wedge(\lambda\cdot x\in B)\}$ y mín $B=\lambda\cdot$máx A

d) Basta tener presente que si $\lambda\in\mathbb{R}^-$ entonces

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda\cdot(-x_n) = -\lambda\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}\ (-x_n) = \lambda\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n .$$

□

Proposición 10

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ son sucesiones acotadas de números reales entonces se verifica

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n$$

Demostración:

Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existirán $n_o \in \mathbb{N}^*$ y $n_1 \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow x_n > \varliminf_{n\to\infty} x_n - \frac{\varepsilon}{2})$$

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow y_n > \varliminf_{n\to\infty} y_n - \frac{\varepsilon}{2}).$$

De donde, notando $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$ resulta

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_2 \Rightarrow x_n + y_n > \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n - \varepsilon).$$

En consecuencia $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ ya que, de lo contrario, existirían infinitos términos de la sucesión $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ verificando la relación $x_n + y_n < \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n - \varepsilon$. Así pues

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n))$$

y, por tanto, $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n)$.

Por otra parte, de la relación anterior deducimos

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) + \varliminf_{n\to\infty} (-y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n$$

es decir

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) - \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n$$

luego

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n .$$

Además

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\varliminf_{n\to\infty} (-x_n - y_n) \geqslant -\varliminf_{n\to\infty} (-x_n) - \varliminf_{n\to\infty} (-y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

Finalmente resulta

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\varliminf_{n\to\infty} (-x_n - y_n) \leqslant -\varliminf_{n\to\infty} (-x_n) - \varliminf_{n\to\infty} (-y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

lo que completa la demostración de la proposición.

□

Proposición 11

Si $x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Demostración:

Si notamos $y_n = \sqrt[n]{x} - 1 \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$, se verificará $x = (1+y_n)^n \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Distinguiremos tres casos:

Primer caso: $x=1$. Trivialmente $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Segundo caso: $x>1$. En este caso se verifica $x=(1+y_n)^n \geq 1+n\cdot y_n > n\cdot y_n$ por tanto $x/n > y_n > 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. En consecuencia $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Es decir: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Tercer caso: $0<x<1$. En este caso $1/x>1$, luego aplicando el caso anterior deducimos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/x} = 1$. Es decir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

□

Proposición 12

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos tal que existen $\overline{\lim_{n\to\infty}} \ x_{n+1}/x_n$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} \ x_{n+1}/x_n$. En tal situación:

i) Existen $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$.

ii) Se verifica: $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \ x_{n+1}/x_n$.

Demostración:

Probemos en primer lugar que existe $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$ y se verifica la relación $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \ x_{n+1}/x_n$.

Si notamos $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \ x_{n+1}/x_n$ entonces

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad \exists n_o \in \mathbb{N}^* : (\forall n)\,(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}) .$$

Luego para cada $K \in \mathbb{N}^*$ deducimos $x_{n_o+K} < x_{n_o} (L+\frac{\varepsilon}{2})^K$, es decir

$$(\forall n)\,(n \in \mathbb{N}^* \wedge n > n_o \Rightarrow x_n < x_{n_o} \cdot (L+\frac{\varepsilon}{2})^{n-n_o}) .$$

Teniendo presente que la anterior desigualdad está establecida entre números reales estrictamente positivos resulta

$$(\forall n)\,(n \in \mathbb{N}^* \wedge n > n_o \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{x_{n_o} (L+\frac{\varepsilon}{2})^{-n_o}} \cdot (L+\frac{\varepsilon}{2})) .$$

Ahora bien, puesto que la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{x_{n_o} \cdot (L+\frac{\varepsilon}{2})^{-n_o}} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a 1 (por la proposición 11) existirá $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1$:

$$\sqrt[n]{x_{n_o} (L+\frac{\varepsilon}{2})^{-n_o}} \cdot (L+\frac{\varepsilon}{2}) < (L+\frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Por tanto, si notamos $n_2 = \text{máx}\,\{1+n_o, n_1\}$ obtendremos para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2$:

$$\sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{x_{n_o} (L+\frac{\varepsilon}{2})^{-n_o}} \cdot (L+\frac{\varepsilon}{2}) < L + \varepsilon$$

de donde resulta que la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada, luego existe $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$ y, además, se verificará para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq L + \varepsilon$$

es decir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

De manera totalmente análoga se demuestra la existencia de $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ y la desigualdad $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

□

Corolario 1 (Criterio de la raiz para la convergencia de sucesiones)

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales estrictamente

positivos tal que existe $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n$ entonces existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ y, además, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$$

□

Corolario 2

La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $x_n = \sqrt[n]{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ es convergente y su límite vale 1.

En efecto: basta tener presente que $\lim_{n\to\infty} n+1/n = 1$ y aplicar el corolario anterior.

□

Corolario 3 (Criterio de la media geométrica)

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión convergente de números reales estrictamente positivos, entonces la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $y_n = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ es convergente y, además, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$

En efecto: basta tener presente que para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica

$$x_{n+1} = \frac{x_1\cdot x_2\cdots x_n\cdot x_{n+1}}{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$

□

§4. EL CONJUNTO $\overline{\mathbb{R}}$. SUCESIONES DIVERGENTES

Sean $+\infty$ y $-\infty$ dos conjuntos distintos que no pertenecen a $\mathbb{R}$.

Definición: Al conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lo denominaremos conjunto ampliado de $\mathbb{R}$.

Introducimos, a continuación, una ordenación $\leqslant$ en $\overline{\mathbb{R}}$ que extiende la ordenación usual de $\mathbb{R}$ así: $-\infty < x < +\infty$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Del hecho de ser $(\mathbb{R}, \leqslant)$ un conjunto totalmente ordenado resulta, trivialmente, que $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$ es un conjunto totalmente ordenado que, además, posee elemento máximo $(+\infty)$ y elemento mínimo $(-\infty)$.

En adelante, siempre que consideremos un concepto relativo a una ordenación (en números reales, en sucesiones de números reales en subconjuntos de $\mathbb{R}$, etc.) sobreentenderemos, salvo que se explicite lo contrario, que es respecto de la ordenación usual de $\mathbb{R}$.

Proposición 1

Todo subconjunto no vacio de $\overline{\mathbb{R}}$ posee supremo e ínfimo en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$.

Demostración:

Si A es un subconjunto no vacio de $\overline{\mathbb{R}}$, para probar la existencia del supremo de A en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$ distinguiremos varios casos:

a) $A \subset \mathbb{R}$. En tal situación, o bien A está acotado superiormente en $(\mathbb{R}, \leqslant)$, en cuyo caso el supremo de A en $(\mathbb{R}, \leqslant)$ será el supremo del conjunto en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$, o bien A no está acotado superiormente en $(\mathbb{R}, \leqslant)$, en cuyo caso $+\infty$ es el supremo de A en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$.

b) $+\infty \in A$. En este caso, trivialmente, $+\infty$ es el supremo de A en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$.

c) $+\infty \notin A$ y $-\infty \in A$. En tal situación, o bien $A = \{-\infty\}$, en cuyo caso $-\infty$ es el supremo de A en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$, o bien $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ en cuyo caso, si A está acotado superiormente en $(\mathbb{R}, \leqslant)$, el supremo en $(\mathbb{R}, \leqslant)$ será el supremo del conjunto en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$ y si A no está acotado superiormente en $(\mathbb{R}, \leqslant)$ entonces $+\infty$ será el supremo de A en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$.

Análogamente se razona la existencia del ínfimo del conjunto de A en $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$.

□

Convergencia en $\overline{\mathbb{R}}$ de una sucesión de números reales

Definición: Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ es convergente a $+\infty$, y lo notaremos $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$, sí y sólo sí para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}^*(n\geqslant n_o)$ se verifica $x_n>\varepsilon$. Es decir

$$[\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty]\Leftrightarrow[(\forall\varepsilon)\,(\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}\Rightarrow(\exists n_o)\,(n_o\in\mathbb{N}^*\wedge(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow x_n>\varepsilon)))]$$

Ejemplos: las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definidas por $x_n=n(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $y_n=2n(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ son convergentes a $+\infty$; en cambio, una sucesión cuasi-constante de números reales no converge a $+\infty$ (más adelante probaremos que cualquier sucesión acotada superiormente es no convergente a $+\infty$).

Definición: Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ es convergente a $-\infty$, y lo notaremos $\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$, sí y sólo sí para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}^*(n\geqslant n_o)$, se verifica $x_n<-\varepsilon$. Es decir

$$[\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty]\Leftrightarrow[(\forall\varepsilon)\,(\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}\Rightarrow(\exists n_o)(n_o\in\mathbb{N}^*\wedge(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow x_n<-\varepsilon)))]$$

De las anteriores definiciones resulta, inmediatamente, que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$ sí y sólo sí la sucesión $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $-\infty$.

Definición: Diremos que una sucesión de números reales es divergente sí y sólo sí es convergente a $+\infty$ o a $-\infty$. Hemos extendido, pues, el concepto de convergencia de una sucesión de números reales a $\overline{\mathbb{R}}$ y, a continuación, vamos a hacer lo propio con los límites superior e inferior.

Definición: Diremos que el límite superior (respectivamente, límite inferior) de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ es $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$), y lo notaremos $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n=+\infty$, (respectivamente, $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n=-\infty$) sí y sólo sí para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ y para cada $n\in\mathbb{N}^*$ existe $n'\in\mathbb{N}^*$ verificando $(n'>n)\wedge(x_{n'}>\varepsilon)$ (respectivamente, $x_{n'}<-\varepsilon$); es decir, sí

y sólo sí para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existen infinitos términos x_n de la sucesión en cuestión verificando $x_n > \varepsilon$ (respectivamente, $x_n < -\varepsilon$). Diremos que el límite superior (respectivamente, límite inferior) de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es $-\infty$ (respectivamente, $+\infty$), y lo notaremos $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$, (respectivamente, $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$) sí y sólo sí la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a $-\infty$ (respectivamente, a $+\infty$).

De las anteriores definiciones resulta inmediatamente:

a) Una sucesión de números reales no puede poseer como límite superior (respectivamente, límite inferior) a $+\infty$ y $-\infty$ simultáneamente).

b) Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$ (respectivamente a $-\infty$) entonces $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ (respectivamente, $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$); no obstante, una sucesión de números reales puede poseer límite superior e inferior infinitos sin ser divergente: la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ definida por $x_n = n$ si n es par y $x_n = -n$ si n es impar posee límite superior $+\infty$, límite inferior $-\infty$ y, en cambio, no es divergente (ni convergente en sentido ordinario).

c) $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ sí y sólo sí $\underline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n) = -\infty$.

d) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ sí y sólo sí $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$.

e) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$ sí y sólo sí $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Proposición 2

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ entonces se verifica:

a) $\left[\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty\right] \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon)(\varepsilon\in\mathbb{R} \Rightarrow (\exists n_o)(n_o\in\mathbb{N}^* \wedge (\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > \varepsilon)))\right]$

b) $\left[\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty\right] \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon)(\varepsilon\in\mathbb{R} \Rightarrow (\exists n_o)(n_o\in\mathbb{N}^* \wedge (\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n < \varepsilon)))\right]$

c) $\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty\right] \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon)(\forall n)(\varepsilon\in\mathbb{R} \wedge n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')\ (n'\in\mathbb{N}^* \wedge n' > n \wedge x_{n'} > \varepsilon))\right]$

d) $\left[\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty\right] \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon)(\forall n)(\varepsilon\in\mathbb{R} \wedge n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')\ (n'\in\mathbb{N}^* \wedge n' > n \wedge x_{n'} < \varepsilon))\right]$

Demostración:

a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^-$ entonces dado $1 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > 1 > \varepsilon)$$

por tanto

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists n_o)(n_o \in \mathbb{N}^* \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > \varepsilon))).$$

Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es tal que

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists n_o)(n_o \in \mathbb{N}^* \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > \varepsilon))),$$

entonces resultará en particular

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists n_o)(n_o \in \mathbb{N}^* \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > \varepsilon)))$$

luego $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

La demostración de los restantes apartados es análoga.

□

Proposición 3

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es convergente a $+\infty$ entonces está acotada inferiormente, pero no superiormente.

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$, entonces dado $\varepsilon = 1$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > 1)$ de donde resulta, inmediatamente, que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada inferiormente. Por otra parte, puesto que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_{n_o} > \varepsilon$ deducimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no está acotada superiormente.

□

Proposición 4

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es convergente a $-\infty$ entonces está acotada superiormente, pero no inferiormente.

Demostración:

Basta tener presente la proposición anterior y el hecho de que $\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$ sí y sólo sí $\lim_{n\to\infty} (-x_n)=+\infty$. □

Los recíprocos de las proposiciones 3 y 4 son falsos, en general. En efecto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $x_n=n$ (si n es par) y $x_n=0$ (si n es impar) está acotada inferiormente, no superiormente y, en cambio, no converge a $+\infty$; la sucesión $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente, no inferiormente y, en cambio, no converge a $-\infty$.

Como consecuencias inmediatas de las proposiciones 3 y 4 deducimos:

a) Si una sucesión de números reales converge a $+\infty$ (respectivamente a $-\infty$) entonces no converge a $-\infty$ (respectivamente, a $+\infty$).

b) Toda sucesión de números reales divergente es no acotada en $(\mathbb{R},\leqslant)$.

c) Toda sucesión de números reales divergente es no convergente (en $\mathbb{R}$).

d) Toda sucesión de números reales convergente (en $\mathbb{R}$) es no divergente.

e) Toda sucesión de números reales no acotada superiormente ni inferiormente es no convergente y no divergente.

Proposición 5

Una sucesión de números reales posee límite superior $+\infty$ (respectivamente, límite inferior $-\infty$) sí y sólo sí no está acotada superiormente (respectivamente, no acotada inferiormente) en $(\mathbb{R},\leqslant)$.

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ es una sucesión de números reales que posee límite superior $+\infty$ entonces para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando $(n_o>1)\wedge(x_{n_o}>\varepsilon)$; luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no está acotada superiormente en $(\mathbb{R},\leqslant)$.

Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no está acotada superiormente en

$(\mathbb{R},\leqslant)$ entonces para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}-\{0\}$ y cada $n\in\mathbb{N}^{*}$ existe $n'\in\mathbb{N}^{*}$ tal que $(n'>n)\wedge(x_{n'}>\varepsilon)$ ya que de lo contrario existirían $\varepsilon_{o}\in\mathbb{R}^{+}-\{0\}$ y $n_{o}\in\mathbb{N}^{*}$ verificando

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^{*}\wedge n>n_{o}\Rightarrow x_{n}\leqslant\varepsilon_{o})$$

lo que implicaría que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ estuviera acotada superiormente en $(\mathbb{R},\leqslant)$. Conclusión: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Análogamente se razona en el caso de que una sucesión de números reales posea límite inferior $-\infty$.

□

Corolario

Toda sucesión de números reales posee límite superior a inferior en $\overline{\mathbb{R}}$.

En efecto: sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^{*}}\in S(\mathbb{R})$ y distingamos varios casos:

a) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ está acotada, entonces de la proposición 8 del parágrafo anterior deducimos la existencia del límite superior e inferior de dicha sucesión en $\mathbb{R}$.

b) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ no está acotada superiormente ni inferiormente entonces de la proposición anterior resulta

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \text{y} \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty .$$

c) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ está acotada inferiormente pero no superiormente, entonces $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$; además puede ocurrir:

c') que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ converja a $+\infty$, en cuyo caso $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

c") que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ no converja a $+\infty$, en cuyo caso existirá $\varepsilon_{o}\in\mathbb{R}^{+}-\{0\}$ tal que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^{*}\Rightarrow(\exists n')(n'\in\mathbb{N}^{*}\wedge n'>n\wedge x_{n'}\leqslant\varepsilon_{o})).$$

En consecuencia, si notamos por M una cota inferior del conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^{*}}\{x_n\}$ resulta que en el intervalo $[M,\varepsilon_{o}]$ existen infinitos

términos de la sucesión y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n \in [M, \varepsilon_o]$.

d) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente pero no inferiormente entonces se razona como en el apartado anterior.

□

Propiedades de las sucesiones divergentes

Proposición 6

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$, entonces se verifica

a) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = -\infty$

Demostración:

a) Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existen $n_o \in \mathbb{N}^* \wedge n_1 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > x - \varepsilon)$$

y

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_1 \Rightarrow y_n > 2\varepsilon - x).$$

Luego si notamos $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$ resultará, para cada $n\in\mathbb{N}^*(n\geq n_2)$: $x_n + y_n > x - \varepsilon + 2\varepsilon - x = \varepsilon$. Es decir $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

b) Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existen $n_o \in \mathbb{N}^*, n_1 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n < x + \varepsilon)$$

y

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_1 \Rightarrow y_n > x + 2\varepsilon).$$

Luego si notamos $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$ resultará, para cada $n\in\mathbb{N}^*(n\geq n_2)$: $x_n - y_n < x + \varepsilon - (x + 2\varepsilon) = -\varepsilon$. Es decir $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = -\infty$.

□

Corolario

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $-\infty$, entonces se verifica:

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -\infty$

b) $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n) = +\infty$

En efecto: si $\lim_{n\to\infty} y_n=-\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}(-y_n)=+\infty$ luego, de la proposición anterior, resulta $\lim_{n\to\infty}[x_n+(-y_n)] = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty}[x_n-(-y_n)] = -\infty$.

□

Proposición 7

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n = +\infty$.

Demostración:

Puesto que $\lim_{n\to\infty} x_n = x\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existirán $M\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ y $n_o\in\mathbb{N}^*$ tales que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow x_n > M)$. En tal situación, para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existirá $n_1\in\mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_1 \Rightarrow y_n > \frac{\varepsilon}{M})$; luego si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$ obtenemos

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_2 \Rightarrow x_n\cdot y_n > M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon)$$

y, en consecuencia, $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n = +\infty$.

□

Corolario 1

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $-\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n = -\infty$.

En efecto: si $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ resulta $\lim_{n\to\infty}(-y_n) = +\infty$ y, de la proposición anterior, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n\cdot(-y_n) = +\infty, \quad \text{luego} \quad \lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n = -\infty.$$

□

Corolario 2

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}^-\!-\{0\}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=-\infty$.

En efecto: si $\lim_{n\to\infty} x_n=x\in\mathbb{R}^-\!-\{0\}$ resulta $\lim_{n\to\infty}(-x_n)=-x\in\mathbb{R}^+\!-\{0\}$ y, de la proposición anterior, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}(-x_n)\cdot y_n=+\infty\,,\quad \text{luego}\quad \lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=-\infty\,.$$

□

Corolario 3

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}^-\!-\{0\}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $-\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=+\infty$.

En efecto: si $\lim_{n\to\infty} y_n=-\infty$ resulta $\lim_{n\to\infty}(-y_n)=+\infty$ y, del corolario anterior, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n\cdot(-y_n)=-\infty;\quad \text{luego}\quad \lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=+\infty\,.$$

□

Obsérvese, en cambio, que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a cero e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ es divergente, entonces no puede asegurarse nada acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión producto $\{x_n\cdot y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. En efecto, si

$$x_n=\frac{1}{n}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*);\ y_n=\frac{(-1)^n}{n}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*);\ z_n=n\ (\forall n\in\mathbb{N}^*);\ t_n=n^2\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

resulta $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=0$ y $\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty} t_n=+\infty$ y, por otra parte, $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot z_n=1$; $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot t_n=+\infty$ y la sucesión $\{y_n\cdot z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no es convergente ni divergente.

Proposición 8

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ convergen a $+\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=+\infty$.

Demostración:

Para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existen $n_o\in\mathbb{N}^*$, $n_1\in\mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow x_n>\frac{\varepsilon}{2})\wedge(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_1\Rightarrow y_n>\frac{\varepsilon}{2})\,.$$

Luego si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$ resulta

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_2\Rightarrow x_n+y_n>\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon)\,;$$

es decir $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=+\infty$. Por otra parte, para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existen $n_3\in\mathbb{N}^*$, $n_4\in\mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_3\Rightarrow x_n>1)\wedge(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_4\Rightarrow y_n>\varepsilon)\,.$$

Luego si notamos $n_5=\max\{n_3,n_4\}$ obtenemos $(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_5\Rightarrow x_n\cdot y_n>\varepsilon)$; es decir $\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=+\infty$.

□

Corolario 1

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ convergen a $-\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=-\infty$ y $\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=+\infty$.

En efecto: si $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=-\infty$ resulta $\lim_{n\to\infty}(-x_n)+(-y_n)=\lim_{n\to\infty}-(x_n+y_n)=+\infty$; es decir $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=-\infty$ y, además,

$$\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim_{n\to\infty}(-x_n)\cdot(-y_n)=+\infty\,.$$

□

Corolario 2

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $-\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=-\infty$ y, en cambio, nada puede asegurarse acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n+y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

En efecto: si $\lim_{n\to\infty}y_n=-\infty$ resulta $\lim_{n\to\infty}(-y_n)=+\infty$ luego $\lim_{n\to\infty}x_n\cdot(-y_n)=+\infty$; es decir $\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=-\infty$. Por otra parte, si consideramos las sucesiones $x_n=n(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $y_n=n^2(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $z_n=-n(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $t_{2k-1}=2k(\forall k\in\mathbb{N}^*)$, $t_{2k}=2k-1(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ deducimos las relaciones

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = -\infty ;$$

en cambio $\lim_{n\to\infty} (x_n+z_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} (y_n+z_n) = +\infty$ y la sucesión $\{t_n+z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ni converge ni diverge.

□

Proposición 9

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ está acotada e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es divergente y tiene todos sus términos distintos de cero, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$.

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ está acotada, existirá $M\in\mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $|x_n| < M$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. Por otra parte, al ser $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ divergente, para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+ - \{0\}$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow |y_n| > \frac{M}{\varepsilon})$ de donde obtenemos

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow |x_n/y_n| < \frac{M}{M/\varepsilon} = \varepsilon)$$

es decir $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$.

□

Corolario

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ es divergente y tiene todos sus términos distintos de cero, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$.

En efecto: basta tener presente que toda sucesión convergente de números reales está acotada.

□

Observemos, en cambio, que si las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ son divergentes y todos los términos de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son distintos de cero, entonces no podemos asegurar nada acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. En efecto, si

consideramos las sucesiones $x_n=n(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $y_n=n^2(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $z_n=-n(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $t_{2k-1}=2k-1(\forall k\in\mathbb{N}^*)$, $t_{2k}=4k(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ se verifican las relaciones

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} z_n = -\infty \ ,$$

mientras que $\lim_{n\to\infty} x_n/z_n = -1$; $\lim_{n\to\infty} y_n/x_n = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} y_n/z_n = -\infty$ y la sucesión $\{t_n/x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ni converge ni diverge, ya que $t_n/x_n=1$ si n es impar y $t_n/x_n=2$ si n es par. Si consideramos, en cambio, las sucesiones $x'_n=1/x_n$, $y'_n=1/y_n$, $z'_n=1/z_n$, $t'_n=1/t_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ siendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ las sucesiones anteriormente definidas, razonando como antes obtenemos unos ejemplos que nos permiten afirmar que dadas dos sucesiones convergentes a cero y tal que todos los términos de una de ellas son distintos de cero, nada podemos asegurar acerca de la convergencia o divergencia de la correspondiente sucesión cociente.

Proposición 10

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ converge a cero y todos sus términos son distintos de cero, entonces la sucesión $\{|x_n/y_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $+\infty$.

Demostración:

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x\in\mathbb{R}-\{0\}$ existirán $M\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ y $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o \Rightarrow |x_n|>M)$. Por otra parte, puesto que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existirá $n_1\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)\left(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_1 \Rightarrow |y_n|<\frac{M}{\varepsilon}\right) .$$

Si notamos $n_2=\max\{n_o,n_1\}$ obtendremos

$$(\forall n)\left(n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_2 \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n}\right|>\frac{M}{M/\varepsilon}=\varepsilon\right)$$

es decir $\lim_{n\to\infty} |x_n/y_n| = +\infty$.

Es interesante observar que $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es no acotada, luego es no convergente, en cambio no podemos asegurar nada acerca de la di-

vergencia o no divergencia de $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ya que si

$$x_n=1\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ y_n=1/n\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ z_n=-1/n\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ t_n=\frac{(-1)^n}{n}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

resulta $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} x_n/z_n = -\infty$, pero la sucesión $\left\{\frac{x_n}{t_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ni converge ni diverge.

□

Operaciones con $+\infty$ y $-\infty$.

Las propiedades de las sucesiones divergentes, anteriormente demostradas, justifican las definiciones siguientes:

a) Para cada $x\in\mathbb{R}$

$$x+(+\infty) = (+\infty)+x = +\infty$$
$$x+(-\infty) = (-\infty)+x = -\infty$$

b) Para cada $x\in\mathbb{R}^+ - \{0\}$

$$x\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot x = +\infty$$
$$x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x = -\infty$$

c) Para cada $x\in\mathbb{R}^- - \{0\}$

$$x\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot x = -\infty$$
$$x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x = +\infty$$

d) $(+\infty)+(+\infty) = (+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

e) $(-\infty)+(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$.

Las anteriores definiciones hemos de interpretarlas en el sentido de que nos expresan, en forma simplificada, propiedades de las sucesiones divergentes. Así, por ejemplo, la definición $x+(+\infty) = +\infty\ (\forall x\in\mathbb{R})$ nos indica que la sucesión suma de una convergente a $x\in\mathbb{R}$ y otra convergente a $+\infty$, es convergente a $+\infty$. Siguiendo esta línea, podemos introducir en $\overline{\mathbb{R}}$ unas notaciones formales que nos traduzcan las restantes propiedades de las sucesiones divergentes:

a) $-(+\infty) = -\infty$; $-(-\infty) = +\infty$

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$

$$x - (+\infty) = -\infty$$
$$x - (-\infty) = +\infty$$

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

Así, la notación formal $-(+\infty) = -\infty$ nos expresa que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ converge a $+\infty$ entonces $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $-\infty$.

Formas de indeterminación.

Finalmente, aquellos casos en los que no podemos asegurar nada a cerca de la convergencia o divergencia de una determinada sucesión, los denominaremos formas de indeterminación. En consecuencia, de las consideraciones hechas anteriormente para sucesiones divergentes, resultan las siguientes formas de indeterminación:

a) $0 \cdot (+\infty)$; $(+\infty) \cdot 0$; $0 \cdot (-\infty)$; $(-\infty) \cdot 0$

b) $(+\infty) + (-\infty)$; $(-\infty) + (+\infty)$

c) $(+\infty) - (+\infty)$; $(-\infty) + (-\infty)$

d) $\frac{+\infty}{+\infty}$; $\frac{+\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{+\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$; $\frac{0}{0}$

Terminaremos el presente parágrafo, estudiando una nueva aplicación del Teorema de Toeplitz que nos proporciona un criterio (debido a Stolz) para la convergencia de sucesiones de números reales (de gran utilidad para el cálculo práctico de límites), así como una generalización de la proposición 12 del parágrafo anterior.

Criterio de Stolz

Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ tales que

a) $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente y convergente a $+\infty$.

b) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow y_n \in \mathbb{R}^+ - \{0\})$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, considerando $x_o = y_o = 0$.

En tales condiciones, se verifica que la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y, además, $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) = a$.

Demostración:

Sea $A = \{(n,k) : (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant k\}$. Sea $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ definida así:

$$f(n,k) = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \quad (\forall (n,k) \in A)$$

y notemos $z_{nk} = f(n,k)$ $(\forall (n,k) \in A)$. Veamos que f verifica las hipótesis del teorema de Toeplitz.

a) Puesto que $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ resulta, para cada $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to\infty} z_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} = 0$$

b) Puesto que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente, se verifica para cada $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} |z_{nk}| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{y_k - y_{k-1}}{y_n}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} = \frac{y_n - y_o}{y_n}$$

y teniendo presente que $\lim_{n\to\infty} (y_n - y_o)/y_n = 1$ deducimos que la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} |z_{nk}|\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada.

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_o}{y_n} = 1.$

En tal situación, puesto que $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) = a$, del teorema de Toeplitz deducimos que la sucesión

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} \right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

es convergente y su límite es a. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{y_n} = \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{x_n}{y_n}.$$

Conclusión: $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = a$. □

Observación 1: El criterio de Stolz es, asímismo, válido en el caso de una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ estrictamente decreciente de términos estrictamente negativos y convergente a $-\infty$.

Observación 2: Bajo las hipótesis a) y b) del criterio de Stolz, la convergencia de la sucesión $\{(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1})\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es condición suficiente pero no necesaria para la convergencia de la sucesión $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. En efecto, si $x_n = (-1)^n$ e $y_n = n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n/n = 0$ y $(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) = 2\cdot(-1)^n \cdot (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Ejemplo:

Si p es un número natural mayor que cero entonces la sucesión

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}} \right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge a $1/p+1$. En efecto, basta aplicar el criterio de Stolz a las sucesiones $x_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ e $y_n = n^{p+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ y tener presente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Proposición 11

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales estrictamente positivos, entonces se verifica

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

en donde dichas desigualdades hemos de considerarlas en $\overline{\mathbb{R}}$.

Demostración:

Basta tener presente:

a) La proposición 12 del parágrafo anterior.

b) El corolario de la proposición 5 de este parágrafo.

c) Si $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = +\infty$, entonces razonando como en la proposición 12 del parágrafo anterior obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = +\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} .$$

d) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \in \mathbb{R}$ y $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leqslant +\infty .$$

□

PROBLEMAS

1.- Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces diremos que un número real x es adherente al conjunto A sí y sólo sí para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ se verifica $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$; y diremos que x es de acumulación de A sí y sólo sí es adherente a $A-\{x\}$.

a) Demostrar que x es adherente a A sí y sólo sí existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de A convergente a x.

b) Demostrar que x es de acumulación de A sí y sólo sí existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(A-\{x\})$ tal que todos sus términos son distintos entre sí y, además, es convergente a x.

Indicación: a) Si $x\in\mathbb{R}$ es adherente a $A\subset\mathbb{R}$, considérese, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n \in]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[\cap A$.
b) Si $x\in\mathbb{R}$ es de acumulación de $A\subset\mathbb{R}$ y φ es una función de elección de $A-\{x\}$, considérese la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}-\{0,1\}, \leqslant)$ en $\mathbb{N}$ definida así: si $g \in \mathcal{F}(S(n); A-\{x\})$ $(n\in\mathbb{N}-\{0,1\})$ y notamos $C_n =]x-1/n, x+1/n[\cap (A-\{x\})$ entonces

$$H(g) = \varphi[C_n - g(S(n))].$$

2.- Si A es un subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$, demostrar que existe un número real x que es de acumulación del conjunto A.

Indicación: Téngase presente que todo conjunto infinito contiene un subconjunto equipotente a $\mathbb{N}$.

3.- A partir del teorema de los intervalos encajados, demostrar que $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable.

Indicación: Suponed la existencia de una aplicación biyectiva $f\in\mathcal{F}(\mathbb{N};\mathbb{R})$, y construir una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $I_1=[1+f(1), 2+f(1)]$ y, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $(I_n = [a_n, b_n])$:

$$I_{n+1} \subset I_n \wedge b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2^n} \wedge f(n+1) \in \mathbb{R} - I_{n+1}.$$

4.- Si una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ carece de sucesiones parciales convergentes, ¿qué puede asegurarse acerca de dicha sucesión? ¿Y del $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$? ¿Y del $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$? ¿Puede ser convergente dicha sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$?

Indicación: Toda sucesión de números reales convergente en $\overline{\mathbb{R}}$ está acotada superior o inferiormente en $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

5.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales y, para cada $p\in\mathbb{N}^*$, consideremos el conjunto

$$A_p = \{x : (\exists n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant p \wedge x = a_n)\}.$$

Demostrar:

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{p\to\infty} [\sup A_p]$

b) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{p\to\infty} [\inf A_p]$

(donde los supremos e ínfimos están considerados en $(\overline{\mathbb{R}},\leqslant)$ y de tal manera que si para algún p $(\sup A_p = +\infty)\vee(\inf A_p = -\infty)$, entonces $(\lim_{p\to\infty} [\sup A_p]=+\infty)\vee(\lim_{p\to\infty} [\inf A_p]=-\infty)$, respectivamente).

Indicación: a) Distíngase dos casos según la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ esté o no acotada superiormente.

6.- Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Demostrar la relación

$$\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

(desigualdades que han de ser consideradas en $(\overline{\mathbb{R}},\leqslant)$).

Si, además, suponemos que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente demostrar la relación

$$\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n+y_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Indicación: Para probar $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ distíngase casos, según ambas sucesiones estén acotadas superiormente o no, y téngase presente la proposición 10 (pág. 439).

7.- Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales positivos tales que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Demostrar la desigualdad en $(\overline{\mathbb{R}},\leqslant)$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

Si, además, suponemos que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente, demostrar la relación

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

Indicación: Distíngase casos como en el problema anterior.

8.- Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión acotada de números reales e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales convergente a un número real estrictamente mayor que cero, demostrar que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

¿Puede deducirse una relación análoga para los correspondientes límites inferiores?

Indicación: Si notamos A, B, C los conjuntos de valores de adherencia de las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{x_n\cdot y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, respectivamente, probar que $C=\{x:(\exists y)\,(y\in A\wedge x=y\cdot z)\}$ siendo $z=\lim_{n\to\infty} y_n$. Concluir que máx C=z·máx A.

9.- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales, demostrar la relación

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

(desigualdad que ha de interpretarse en $(\overline{\mathbb{R}},\leqslant)$).

Indicación: Probar que si $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L\in\mathbb{R}$ entonces, para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$, resulta

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leqslant L+\varepsilon .$$

Concluir que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n .$$

10.- Calcular el límite superior e inferior, así como los valores de adherencia, de las sucesiones de términos generales:

a) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{(1+n)^n}$

b) $b_n = 1+n^{(-1)^n}$

c) $c_n = n^2+(-1)^n \cdot n$

d) $d_n = 1+(1/n)+(-1)^n$

d) $e_n = 2+(-1)^n$

f) $f_n = (-1)^n \cdot n$

g) $g_{3n} = 1$, $g_{3n-1} = n$, $g_{3n-2} = 1/n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

11.- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales, demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente.

b) Para cada $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{N}^*)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$ y para cada $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{N}^*)$ se verifica $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, siendo $b_n = a_{\alpha_n+\beta_n} - a_{\alpha_n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

Indicación: b) $\Rightarrow$ a) Considérese la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{N}^*)$ definida por $\alpha_n = n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

12.- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales, demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = L\in\mathbb{R}$.

b) L es valor de adherencia de cada sucesión parcial de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

13.- a) Si un número real es valor de adherencia de una sucesión de números reales, ¿puede asegurarse que dicho número real sea adherente al conjunto cuyos elementos son los términos de una sucesión?.

b) Si un número real es adherente al conjunto cuyos elementos son los términos de una sucesión, ¿puede asegurarse que dicho número real sea valor de adherencia de la sucesión?.

14.- a) ¿Puede asegurarse que una sucesión de números reales está acotada sí y sólo sí toda sucesión parcial posee, al menos, una sucesión parcial convergente?

b) ¿Puede asegurarse que una sucesión acotada de números reales es convergente sí y sólo sí posee un único valor de adherencia?

15.- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales, demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión no acotada sí y sólo sí posee, al menos, una sucesión parcial divergente. ¿Puede asegurarse que una sucesión de números reales es divergente sí y sólo sí posee, al menos, una sucesión parcial no acotada?. ¿Puede ser divergente una sucesión de números reales que posea, al menos, un valor de adherencia?

16.- Diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números reales converge a ∞ sí y sólo sí la sucesión $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $+\infty$.

a) Demostrar que una sucesión de números reales es no acotada sí y sólo sí posee, al menos, una sucesión parcial convergente a ∞.

b) Demostrar que una sucesión de números reales converge a ∞ sí y sólo sí carece de sucesiones parciales acotadas.

c) Demostrar que si dos sucesiones de números reales convergen a ∞ entonces el producto también converge a ∞ y, en general, la suma no converge a ∞.

17.- Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión divergente de números reales estrictamente positivos y consideremos

$$A = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - a_n) = +\infty \right\}.$$

a) Demostrar que toda sucesión acotada de números reales pertenece al conjunto A y que, en cambio, existen sucesiones no acotadas de números reales pertenecientes a A.

b) Demostrar que $A \subsetneq B$.

18.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty} n \cdot (a_n + a_{2n}) = 1$. Notemos $b_n = n \cdot a_n$ y $c_n = b_n - 2/3$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada.

b) Demostrar que si α es un valor de adherencia de $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ entonces -2α es otro valor de adherencia de $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, concluyendo que 0 es el único valor de adherencia de $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a 2/3.

Indicación: b) Pruébese que si $\{c_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión parcial de $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente a α entonces $\lim_{k\to\infty} c_{2n_k} = -2\alpha$.

19.- Sin utilizar la proposición 12 del parágrafo 3, demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

Indicación: Si notamos $x_n = \sqrt[n]{n}-1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, pruébese que para cada $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, se verifica

$$n > \binom{n}{2} x_n^2 \quad \text{y, por tanto,} \quad x_n^2 < \frac{4}{n} .$$

20.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que existe $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant n_o \Rightarrow a_n \leqslant b_n \leqslant c_n).$$

a) Demostrar que si las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son convergentes entonces la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ posee, al menos, un valor de adherencia.

b) Demostrar que si $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es divergente entonces, o bien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ o bien $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es divergente.

c) Si, además, suponemos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es monótona y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente, demostrar que dichas sucesiones son convergentes.

21.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que

$$(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \geqslant 0) \wedge (\exists m)\,(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < m \leqslant b_n)$$

Demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $x_n = (-1)^n a_n \cdot b_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ no puede ser convergente a un número real distinto de cero.

Indicación: Probar que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada entonces posee un valor de adherencia positivo y un valor de adherencia negativo.

22.- Sean $a\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{R}^+-\{0\}$, $M\in\mathbb{R}^+-\{0\}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ tales que $(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \geqslant a \wedge 0 < m \leqslant b_n \leqslant M)$.

Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por

$$x_n = a + (-1)^n \cdot b_n \cdot (a_n - a) \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

Demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente sí y sólo sí se verifica que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Indicación: Deducid del problema anterior que si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente, entonces su límite es a.

23.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$, y consideremos para cada $n\in\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \max\{a_1,\ldots,a_n\} \quad \text{y} \quad c_n = \min\{a_1,\ldots,a_n\} .$$

a) Demostrar que las sucesiones $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son convergentes.

b) Dar ejemplo de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} b_n \neq a \quad y \quad \lim_{n\to\infty} c_n \neq a .$$

c) Si notamos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{a_n\}$ demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sup A \quad y \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \text{ínf } A.$$

d) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es constante sí y sólo sí $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.

24.- Consideremos en $S(\mathbb{R})$ la relación $\leqslant$ definida así: para cada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$

$$\left[\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \leqslant \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\right] \Leftrightarrow \left[(\forall n)\,(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \leqslant b_n)\right]$$

a) Demostrar que $(S(\mathbb{R}),\leqslant)$ es un conjunto reticulado y no totalmente ordenado.

b) Demostrar que el conjunto de sucesiones monótonas de números reales es cofinal y coinicial en $(S(\mathbb{R}),\leqslant)$.

Indicación: b) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ considérese

$$b_n = \text{máx}\,\{a_1,\ldots,a_n\} \quad y \quad c_n = \text{mín}\,\{a_1,\ldots,a_n\} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

25.- Notemos $S_A(Q)$ al conjunto de sucesiones acotadas de números racionales.

a) Demostrar que $S_A(Q)$ es un subanillo unitario y conmutativo de $(S(Q),+,\cdot)$.

b) Demostrar que $C(Q)$ y $C^*(Q)$ son subanillos unitarios y conmutativos de $(S_A(Q),+,\cdot)$.

c) Demostrar que $N(Q)$ es un ideal de $(S_A(Q),+,\cdot)$.

d) Demostrar que el anillo cociente $(S_A(Q)/N(Q),+,\cdot)$, no es un cuerpo.

e) Demostrar que existe un subcuerpo del anillo cociente

$$\left(\frac{S_A(Q)}{N(Q)},+,\cdot\right)$$

isomorfo a $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

Indicación: d) Probar que el anillo cociente posee divisores de cero.

e) Considérese el subconjunto de $S_A(Q)/N(Q)$ cuyos elementos son las clases de equivalencia que poseen como representantes sucesiones de Cauchy de números racionales.

26.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que:

i) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow b_n>0\wedge a_n+b_n\neq 0\wedge a_n\neq 0)$.

ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es monótona.

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

a) Demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por

$$x_n = \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

puede no ser convergente.

b) Demostrar que si $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n>0)$, entonces podemos asegurar que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ prescindiendo de la monotonía de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

27.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow b_n>0)$ y consideremos

$$c_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

Demostrar que si la sucesión $\{a_n/b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente (respectivamente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente) entonces la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente (respectivamente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente).

Indicación: Teniendo presente que, para cada $k\in\mathbb{N}^*$ $(k<n+1)$ se verifica $a_{n+1}/b_{n+1} - a_k/b_k \geqslant 0$, probar que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow c_{n+1}-c_n \geqslant 0)$.

28.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión creciente (respectivamente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente) de números reales y consideremos

$$b_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

Demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente (respectivamente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente).

29.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión convergente de números reales y consideremos

$$b_n = \frac{\binom{n}{0}a_1+\ldots+\binom{n}{n}a_{n+1}}{2^n} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

Demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y, además, verifica $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Indicación: Aplíquese el teorema de Toeplitz a la aplicación $f\in\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ definida por

$$f(m,n) = \frac{1}{2^{m-1}}\binom{m-1}{n-1} \quad (\forall (m,n)\in A).$$

Es decir, al "esquema triangular infinito":

$$\frac{1}{2^0}\binom{0}{0}$$

$$\frac{1}{2^1}\binom{1}{0} \quad \frac{1}{2^1}\binom{1}{1}$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2^{m-1}}\binom{m-1}{0} \quad \frac{1}{2^{m-1}}\binom{m-1}{1} \quad \ldots \quad \frac{1}{2^{m-1}}\binom{m-1}{m-1}$$

. . . . . .

30.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n<b_n) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales verificando la condición siguiente:

"Para cada $n\in\mathbb{N}^*$ el conjunto

$$A_n=\{k:k\in\mathbb{N}^*\wedge c_k\notin]a_n,b_n[\}$$

es finito".

a) Demostrar que la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y, además, verifica:

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n\leq\lim_{k\to\infty} c_k\leq b_n)$$

b) Demostrar que si las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son convergentes, entonces sus límites coinciden con el de la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Indicación: a) Pruébese que la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy.

31.- Sea $p\in\mathbb{N}^*$ y $a_1,\ldots,a_p$ números reales estrictamente positivos. Para cada $n\in\mathbb{N}^*$ notemos

$$x_n=\frac{a_1^n+\ldots+a_p^n}{p} \quad \text{y} \quad x_0=0.$$

a) Demostrar que $(\forall n)(n\in\mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1}^2\leq x_n\cdot x_{n+2})$.

b) Si, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ notamos $y_n=\sqrt[n]{x_n}$, demostrar que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite es $\max\{a_1,\ldots,a_p\}$.

Indicación: b) Pruébese que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión estrictamente creciente y acotada. Para el cálculo del límite, aplíquese la proposición 12 del parágrafo 3.

32.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales positivos tales que, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ y $m\in\mathbb{N}^*$ se verifica $a_{n+m}\leq a_n\cdot a_m$.

Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y, además,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf \{ x : (\exists n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge x = \sqrt[n]{a_n}) \}.$$

Indicación: Fijado $n\in\mathbb{N}^*$, demostrar que para cada $p\in\mathbb{N}^*$ existen únicos $q\in\mathbb{N}^*$ y $r\in\mathbb{N}^*$ tales que

$$(0\leq r< n) \wedge (p=q\cdot n+r) \wedge (\sqrt[p]{a_p} \leq \sqrt[p]{a_n^q}\cdot \sqrt[p]{a_r}).$$

33.- Si a es un número racional estrictamente positivo, demostrar la existencia de una única sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ verificando las condiciones:

i) $a_1=a$.

ii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}))$.

Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión convergente y su límite es $\sqrt{a}$.

Indicación: Pruébese que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy, distinguiendo dos casos: a) que exista $n\in\mathbb{N}^*$ tal que $a/a_{n_o} = a_{n_o}$. b) Que para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifique $a/a_n \neq a_n$.

34.- Si a es un número real estrictamente positivo, demostrar la existencia de una única sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ verificando las condiciones:

i) $a_1=a$.

ii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2})$.

Demostrar, asímismo, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente y no acotada superiormente. ¿Qué podemos asegurar de la sucesión $\{1/a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Indicación: Si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ estuviese acotada superiormente entonces sería convergente. La sucesión $\{1/a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero.

35.- Demostrar la existencia de una única sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números racionales verificando las condiciones:

i) $a_1=1$.

ii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n})$.

Probar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy en Q, no convergente en Q.

Indicación: Probar que, para cada $n\in\mathbb{N}$, se verifica la relación $|a_{n+1}^2 - 2| \leq 1/4^n$.

36.- Sea α un número real mayor o igual que $\sqrt{2}$ y a un número racional estrictamente positivo; demostrar la existencia de una única sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ verificando las condiciones:

i) $a_1=a$.

ii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge a_n \in Q \Rightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\min\{a_n, \sqrt{2}\}})$.

iii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge a_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow a_{n+1} = \alpha)$.

Demostrar, asímismo, que si $\alpha\in\mathbb{Q}$ entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no es convergente y, en cambio, si $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente, ¿cuál es su límite?

Indicación: Si $\alpha\in\mathbb{Q}$ considérese dos casos: uno en el que exista $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $a_{n_o} = \alpha$, y el caso contrario.

Si $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ pruébese que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es cuasi-constante.

37.- Si a es un número real estrictamente positivo, demostrar la existencia de una única sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ verificando las condiciones:

i) $a_1=a$.

ii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{a+a_n})$.

Además se pide:

a) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente y está acotada superiormente por $1+a$.

b) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y calcular su límite.

c) Demostrar que, para cada $m\in\mathbb{N}^*$, existe $b_m\in\mathbb{N}^*$ tal que si notamos $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ a la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ relativa al caso $a=b_m$, entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty} a'_n = m$.

38.- Sean x e y números reales tales que $x<y$. Demostrar la existencia de dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ verificando, simultáneamente, las condiciones siguientes:

a) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \in]x,y[\wedge b_n\in]x,y[)$.

b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente decreciente.

c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente.

d) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow b_n - a_n \in \mathbb{Q})$.

e) $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

f) $\lim_{n\to\infty} b_n = y$.

39.- Si x es un número real, demostrar la existencia de dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números irracionales (elementos de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) verificando, simultáneamente, las condiciones siguientes:

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente.

b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente decreciente.

c) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow b_n-a_n\in\mathbb{Q})$.

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$.

40.- Si x e y son números reales tales que $x<y$, demostrar la existencia de dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números irracionales

les verificando, simultáneamente, las condiciones siguientes:

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente.

b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente decreciente.

c) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow b_n - a_n \in Q)$.

d) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x<a_n<b_n<y)$.

e) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Indicación: Téngase presente el problema anterior.

41.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales tal que

$$(\forall n)(\forall m)(n\in\mathbb{N}^* \wedge m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{m+n} \leqslant a_m + a_n)$$

y, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, consideremos $b_n = a_n/n$.

a) Demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente.

b) Demostrar que si la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada inferiormente, entonces $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente al ínfimo del conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{b_n\}$.

Indicación: b) Para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+ - \{0\}$ considérese $p\in\mathbb{N}^*$ tal que $b_p < \alpha+\varepsilon$, y pruébese que para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica

$$b_n \leqslant \frac{a_p}{p}\cdot\frac{pq}{pq+r} + \frac{r}{n}\cdot a_1$$

siendo q y r el cociente y resto, respectivamente, de la división euclídea de n por p y $\alpha = \text{ínf}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{b_n\}\right]$.

42.- Si $x\in\mathbb{R}$ entonces notaremos por $[x]$ al mayor número entero menor o igual que x (y que se denomina la parte entera de x).

Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, consideremos $a_n = n\cdot\alpha - [n\alpha]$.

a) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tiene todos sus términos distintos entre sí, sí y sólo si $\alpha\in\mathbb{R}-Q$.

b) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente sí y sólo sí $\alpha\in Z$.

43.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión acotada de números reales y, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, consideremos

$$X_n = \bigcup_{k=n}^{\infty}\{a_k\}.$$

a) Si, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ notamos $\alpha_n = \sup X_n$, demostrar que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente y convergente (notemos su límite por α).

b) Demostrar que si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

c) Dar un ejemplo de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ acotada no convergente de números reales, y calcular α en dicho caso concreto.

44.- ¿Puede existir una sucesión convergente y no cuasi-constante de

números reales tal que todo término de la sucesión sea valor de adherencia de la misma? ¿Y tal que ningún término de la sucesión sea valor de adherencia?

45.- Demostrar la existencia de una sucesión de números reales tal que todo número real sea valor de adherencia de dicha sucesión.

46.- Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{N}^*)$ una sucesión estrictamente creciente y $t\in\mathbb{R}$ tal que $|t|<1$. Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión acotada de números reales verificando $\lim_{n\to\infty}(a_n+t.a_{p_n})=0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

47.- Demostrar la existencia de una única sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números reales verificando, simultáneamente, las condiciones:

i) $a_1 = 0$.

ii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2})$.

iii) $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{2n+1} = (1/2) + a_{2n})$.

Obtener, asímismo, los valores de adherencia y los límites superior e inferior de dicha sucesión.

Indicación: Téngase presente que si una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifica que $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lambda$ y $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \mu$, entonces λ y μ son los únicos valores de adherencia.

48.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales y definamos

$$b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

i) Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente de límite $a\in\mathbb{R}$ entonces $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y posee límite a.

ii) Mediante un contraejemplo, pruébese que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ puede ser convergente sin serlo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

iii) Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es monótona y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente.

Indicación: iii) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente téngase presente que $b_n \leqslant a_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y, además, si $p<n$ entonces

$$b_n \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k + \frac{n-p}{n}\cdot a_p.$$

49.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión acotada de números reales tal que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$. Demostrar que el conjunto de valores de adherencia de dicha sucesión es un intervalo cerrado de $(\mathbb{R},\leqslant)$.

Indicación: Pruébese que si λ y μ son valores de adherencia tales que $\lambda<\mu$ entonces $(\forall\gamma)(\gamma\in\,]\lambda,\mu[\Rightarrow \gamma$ es valor de adherencia de dicha sucesión).

50.- i) Sean λ y μ números reales estrictamente positivos tales que $\lambda \geq \mu$. Demostrar la existencia de una única sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ y de una única sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ verificando simultaneamente:

a) $a_1 = \lambda \wedge b_1 = \mu$.

b) $(\forall n)\left(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \wedge b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\right)$.

ii) Demostrar que ambas sucesiones son convergentes al número real $\sqrt{\lambda\cdot\mu}$.

Indicación: i) Aplíquese el teorema 1 (§3, cap. IV. pág.189) al esquema: $m=0$, $B=(\mathbb{R}^+ - \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ - \{0\})$, $\alpha = (\lambda, \mu)$ y $g \in \mathcal{F}(B;B)$ definida por $g(x,y) = ((x+y)/2, 2xy/(x+y))$.

ii) Pruébese que $a_{n+1} - b_{n+1} > 0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ para concluir que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente. Finalmente, obsérvese que $a_{n+1} - b_{n+1} \leq (a_1 - b_1)/2^n$ y que $\lambda\cdot\mu = a_n \cdot b_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

51.- Sean a, b y c números reales tales que $0<c<b$ y $a>0$.

a) Demostrar que existe una única sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ verificando:
$$x_1 = c \wedge (\forall n)\left(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a\cdot b^2}{a+1}}\right).$$

b) Demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente por b y, además, es estrictamente creciente.

c) Establecer la convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y calcular su límite.

Indicación: a) Considérese la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}^* - \{1\}, \leq)$ en $\mathbb{R}$ definida así: "si $g \in \mathcal{F}(S(n);\mathbb{R})$ $(n>1)$ entonces
$$H(g) = \sqrt{\frac{[g(n-1)]^2 + a\cdot b^2}{a+1}}\ ".$$

b) Pruébese por inducción completa que $(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x_n < b)$.

11

SERIES DE NUMEROS REALES

§ 1 · SERIES DE NUMEROS REALES: CONSIDERACIONES ALGEBRAICAS

La propiedad asociativa de la suma de los números reales permite considerar, basándose en un proceso recurrente, la suma de un número finito arbitrario de números reales, lo que, obviamente, no puede generalizarse al caso no finito. Pues bien, la introducción de las series de números reales dará sentido a la "suma" de todos los términos de determinadas sucesiones ("suma" que, por tanto, poseerá infinitos "sumandos"), considerando las "sumas parciales" de una sucesión de números reales, que nos permitirá analizar el comportamiento de tales sumas cuando el número de sumandos converge a $+\infty$.

Definición:

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces al número real

$X_n=x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$ lo denominaremos suma parcial n-ésima de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. De esta forma, toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ tiene asociada, unívocamente, una sucesión de sumas parciales $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$. Y recíprocamente, dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ existe una única sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ tal que la sucesión de sumas parciales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sea precisamente $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, ya que bastará definir $x_1=y_1$ y $x_n=y_n-y_{n-1}(\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\})$.

Notación:

En todo el presente capítulo, la suma parcial n-ésima de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})$ la notaremos por la letra mayúscula correspondiente X_n ; así $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ será la sucesión de sumas parciales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ $S(\mathbb{R})$.

Definición:

Una serie de números reales es un par ordenado $(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*},\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ en el que la primera componente es una sucesión de números reales y la segunda componente es la sucesión de sumas parciales de la sucesión primera componente.

Una serie de números reales quedará completamente determinada por una de las dos componentes del par ordenado que la define.

Notaremos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a la serie de números reales $(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*},\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$; a los términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ los denominaremos términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Recuérdese que en la definición de sucesión es indiferente considerar $\mathbb{N}^*$ o $\mathbb{N}$; luego en la teoría de series que desarrollaremos puede considerarse, indistintamente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si bien habría que hacer algunas puntualizaciones elementales respecto a algunas expresiones que surgen en la teoría.

Notaremos $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ al conjunto cuyos elementos son las series de números reales (¿porqué la clase cuyos elementos son las series de números reales es un conjunto?) y definimos en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ las operaciones siguientes:

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces la serie suma de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, que notaremos por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$. Obsérvese que si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ son, respectivamente, las sucesiones de sumas parciales de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, entonces $\{X_n + Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es la sucesión de sumas parciales de $\{x_n + y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Obviamente, la serie suma define una operación interna en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces el producto de un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, que notaremos por $\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot x_n$. Obsérvese que $\{\lambda . X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es la sucesión de sumas parciales de $\{\lambda \cdot x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, y que el producto de un número real por una serie define una operación externa en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, a través del cuerpo de los números reales.

Es consecuencia inmediata de las anteriores definiciones y de que $(\mathbb{R},+,.)$ es un cuerpo conmutativo, que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ posee estructura de espacio vectorial real, respecto de la operación interna y operación externa anteriormente considerada; el elemento nuetro de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}),+)$ es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ definida por $x_n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.

Definimos, a continuación, tres nuevas operaciones internas en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces el producto ordinario o de Cauchy de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, que notaremos $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ siendo $z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$. Es decir $z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k}\, y_k$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces el primer producto in-

terior de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, que notaremos $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n (\mathscr{S}(\mathbb{R}))$ siendo $z_n = x_n \cdot y_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces el segundo producto interior de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$,que notaremos $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \perp (\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ que verifica la siguiente condición: $Z_n = X_n \cdot Y_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ donde $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ representan, respectivamente, las sucesiones de sumas parciales de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Propiedades del producto ordinario o de Cauchy de series

Proposición 1

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y notamos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, entonces se verifica $Z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot Y_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot y_{n+1-k}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ resulta

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j} x_k y_{j+1-k} \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=k}^{n} y_{j+1-k} \right)$$

y teniendo presente que para cada $k \in \mathbb{N}^*$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ se verifica $\sum_{j=k}^{n} y_{j+1-k} = Y_{n+1-k}$, concluimos $Z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot Y_{n+1-k}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

De la simetría del producto ordinario respecto de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ deducimos de la relación anterior

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot X_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} y_{n+1-k} \cdot X_k \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

□

Proposición 2

El conjunto $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ posee estructura de semigrupo unitario y conmutativo, respecto del producto ordinario o de Cauchy.

Demostración:

Trivialmente, el producto ordinario define una operación interna en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

a) El producto ordinario es asociativo en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; en efecto, si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ resultará $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$ siendo $t_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Luego

$$[(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)] \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} z_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} t_n).(\sum_{n=1}^{\infty} z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ siendo}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{k} x_j y_{k+1-j}) z_{n+1-k} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*), \text{ es decir}$$

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} x_p (\sum_{q=1}^{n-p+1} y_q \, z_{n+2-p-q}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*). \text{ Por otra parte,}$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} y_n).(\sum_{n=1}^{\infty} z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ siendo } v_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \, z_{n+1-k} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

luego

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \cdot [(\sum_{n=1}^{\infty} y_n).(\sum_{n=1}^{\infty} z_n)] = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \text{ siendo}$$

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot (\sum_{j=1}^{n+1-k} y_j \, z_{n+1-k+1-j}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Es decir,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} x_k (\sum_{j=1}^{n+1-k} y_j \, z_{n+2-k-j}) = u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \text{ y, por tanto,}$$

deducimos finalmente:

$$[(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)] \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} z_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \cdot [(\sum_{n=1}^{\infty} y_n).(\sum_{n=1}^{\infty} z_n)]$$

b) El producto ordinario es conmutativo en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; en efecto, si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ resultará

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \text{ siendo } t_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} y_n).(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ siendo } u_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \, x_{n+1-k} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

de donde obtenemos $t_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} y_k x_{n+1-k} = u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

c) El producto ordinario posee elemento neutro en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; en efecto, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ definida por $a_1 = 1$ y $a_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\})$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ deducimos

$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)=(\sum_{n=1}^{\infty} a_n).(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$ siendo

$t_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\, a_{n+1-k} = x_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$. Luego

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n).(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Proposición 3 □

El producto ordinario es distributivo respecto de la suma en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ resulta

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).\,[\sum_{n=1}^{\infty} y_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n\,] = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} (y_n+z_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$$

siendo $t_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.(y_{n+1-k}+z_{n+1-k}) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.

Por otra parte, $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ siendo

$u_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_{n+1-k} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} z_n)= \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

siendo $v_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\, z_{n+1-k} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$. Luego obtendremos

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n) + (\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} z_n)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

siendo $w_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} x_k z_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} x_k (y_{n+1-k}+z_{n+1-k}) = t_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$,

lo que demuestra la distributividad del producto ordinario respecto de la suma en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

□

Resumiendo las propiedades anteriores, podemos concluir que el conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ posee estructura de álgebra unitaria y conmutativa respecto de la suma, producto ordinario y producto de un número real por una serie.

Propiedades del primer producto interior de series.

Proposición 4

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y notamos

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n=(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, entonces se verifica

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k\cdot(x_k-x_{k+1})+Y_n\cdot x_{n+1}= \sum_{k=1}^{n} X_k\cdot(y_k-y_{k+1})+X_n\, y_{n+1} \quad (\forall n\in \mathbb{N}^*)$$

Demostración:

Si consideramos $Y_o = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ obtenemos

$$Z_n= \sum_{k=1}^{n} z_k= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k\cdot(Y_k-Y_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} Y_k(x_k-x_{k+1})+Y_n\cdot x_{n+1}$$

A partir de esta relación y de la simetría del primer producto interior de series respecto de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, deducimos $Z_n= \sum_{k=1}^{n} X_k(y_k-y_{k+1})+X_n y_{n+1}$ $(\forall n\in \mathbb{N}^*)$.

□

Proposición 5

El conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ posee estructura de semigrupo unitario y conmutativo, respecto del primer producto interior.

Demostración:

Trivialmente, el primer producto interior de series define una operación interna en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) El primer producto interior es asociativo en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; en efecto, si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces se verifica

$$[(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty}y_n)]*(\sum_{n=1}^{\infty}z_n)= (\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n)*(\sum_{n=1}^{\infty}z_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n\cdot y_n)\cdot z_n=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}x_n\cdot(y_n\cdot z_n)= (\sum_{n=1}^{\infty}x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty}y_n\cdot z_n)= (\sum_{n=1}^{\infty}x_n) * [(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)*(\sum_{n=1}^{\infty}z_n)] .$$

b) El primer producto interior es conmutativo en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; en efecto, si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ resulta

$$(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty}y_n)= \sum_{n=1}^{\infty}x_n\cdot y_n=\sum_{n=1}^{\infty}y_n\cdot x_n= (\sum_{n=1}^{\infty}y_n)*(\sum_{n=1}^{\infty}x_n).$$

c) El primer producto interior posee elemento neutro en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; efecto, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ definida por $a_n = 1 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ deducimos

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

□

Proposición 6

El primer producto interior de series es distributivo respecto de la suma en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces se verifica

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)* [\sum_{n=1}^{\infty} y_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n] = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} (y_n+z_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot (y_n+z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_n + x_n z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n =$$

$$= (\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} y_n) + (\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} z_n).$$

□

Conclusión

El conjunto $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ posee estructura de álgebra unitaria y conmutativa respecto de la suma, primer producto interior y producto de un número real por una serie.

Propiedades del segundo producto interior de series.

Proposición 7

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y notamos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \perp (\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, entonces se verifica $z_n = X_n \cdot y_n + Y_n \cdot x_n - x_n \cdot y_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$

Demostración:

Si consideramos $X_o=Y_o=Z_o=0$, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ obtendremos:

$$z_n=Z_n-Z_{n-1}=X_n.Y_n-X_{n-1}.Y_{n-1}=X_n.Y_{n-1}+X_n.y_n-X_{n-1}.Y_{n-1}=$$

$$=Y_{n-1}.(X_n-X_{n-1})+X_n.y_n=Y_{n-1}.x_n+X_n.y_n=(Y_n-y_n).x_n+X_n.y_n=Y_n.x_n+X_n.y_n-x_n.y_n$$

□

Proposición 8

El conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ posee estructura de semigrupo unitario y conmutativo, respecto del segundo producto interior de series.

Demostración:

Trivialmente, el segundo producto interior de series define una operación interna en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) El segundo producto interior es asociativo en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; en efecto: si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces se verifica para cada $n\in\mathbb{N}^*$:

$$(X_n.Y_n).Z_n=X_n.(Y_n.Z_n).$$

Luego la serie $[(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)\perp(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)]\perp(\sum_{n=1}^{\infty} z_n)$ y la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)\perp[(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)\perp(\sum_{n=1}^{\infty} z_n)]$ poseen iguales las segundas componentes, por tanto coinciden.

b) El segundo producto interior es conmutativo en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; en efecto, razonando como antes, basta tener presente que para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica $X_n.Y_n=Y_n.X_n$.

c) El segundo producto interior posee elemento neutro en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; en efecto, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definida por $a_1=1$ y $a_n=0$ $(\forall\, n\in\mathbb{N}-\{0,1\})$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces se verifica

$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)\perp(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)=(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)\perp(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ siendo $z_n=X_n.a_n+A_nx_n-x_na_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, y teniendo presente que $A_n=1(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ deducimos $z_n=x_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

□

Proposición 9

El segundo producto interior de series es distributivo respecto de la suma en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica $X_n \cdot (Y_n + Z_n) = X_n \cdot Y_n + X_n \cdot Z_n$; de donde resulta que la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \perp [\sum_{n=1}^{\infty} y_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n]$ y la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \perp (\sum_{n=1}^{\infty} y_n) + (\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \perp (\sum_{n=1}^{\infty} z_n)$ poseen iguales sus segundas componentes y, por tanto, coinciden.

□

Conclusión:

El conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ posee estructura de álgebra unitaria y conmutativa respecto de la suma, segundo producto interior y producto de un número real por una serie.

Así pues, hemos dotado al espacio vectorial real $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de tres estructuras de álgebra real unitaria y conmutativa respecto de cada uno de los productos de series, anteriormente definidos. A continuación vamos a caracterizar los elementos invertibles de cada una de dichas álgebras.

Proposición 10

Los elementos invertibles en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, respecto del producto ordinario o de Cauchy, son las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que $x_1 \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Demostración:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $x_1 \in \mathbb{R}-\{0\}$, veamos que existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ verificando

$$x_1 \cdot y_1 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_{n+1-k} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}) .$$

En efecto, basta considerar

$$y_1 = \frac{1}{x_1} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{x_1} \cdot \sum_{k=2}^{n} (-x_k) \cdot y_{n+1-k} \quad (\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\})$$

por tanto, si $x_1 \in \mathbb{R}-\{0\}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es invertible respecto del producto ordinario.

Recíprocamente, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es tal que $x_1=0$. En tal situación, no existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ verificando $x_1 \cdot y_1 = 1$ y $\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_{n+1-k} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\})$ ya que $x_1 \cdot y_1 = 0 \neq 1$, para cualquier número real $y_1 \in \mathbb{R}$. En consecuencia, la tal serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no será invertible por el producto ordinario.

□

Proposición 11

Los elementos invertibles en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, respecto del primer producto interior, son las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que $x_n \in \mathbb{R}-\{0\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Demostración:

Basta tener presente que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ verifica $x_n \in \mathbb{R}-\{0\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es tal que $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) * (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siendo $a_n = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es invertible respecto del primer producto interior.

Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es tal que existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ con $x_{n_o}=0$, entonces para cualquier sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ se verifica $x_{n_o} \cdot y_{n_o} = 0 \neq 1$ y, por tanto, dicha serie no sería invertible respecto del primer producto interior.

□

Proposición 12

Los elementos invertibles en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, respecto del segundo producto interior, son las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que todas las sumas parciales X_n son distintas de cero.

Demostración:

El razonamiento es análogo al de la proposición anterior, basta considerar la sucesión de sumas parciales $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ en lugar de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, y recordar la definición del segundo producto interior de series.

□

§2: SERIES DE NUMEROS REALES: CONVERGENCIA

El concepto de serie de números reales convergente nos permitirá introducir lo que denominaremos suma de una serie, dándose así un cierto sentido a una "suma" cuyos sumandos son todos los términos de una determinada sucesión de números reales.

Definición: Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es convergente sí y sólo sí es convergente en $\mathbb{R}$ la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de sumas parciales de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. En tal situación, al límite de la sucesión de sumas parciales $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ lo denominaremos suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y lo notaremos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \to \infty} X_n$.

Obsérvese que, formalmente, la igualdad que expresa la notación anterior es incorrecta ya que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\lim_{n \to \infty} X_n \in \mathbb{R}$; es decir, dicha relación no puede concebirse como una igualdad, propiamente, entre objetos matemáticos sino simplemente como una forma sencilla de expresar un determinado concepto.

Por otra parte, la nomenclatura de "suma" para denominar al límite de la sucesión de sumas parciales de una serie convergente de números reales, también puede inducir a confusionismo. En efecto, si consideramos dos series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces la igualdad $\sum_{n=1} x_n + \sum_{n=1} y_n$ puede "interpretarse" de dos formas esencialmente distintas, bien como una suma ordinaria en el grupo conmutativo $(\mathbb{R},+)$ con tal de concebir $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ como la suma de la serie $\left(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}, \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}\right)$, o bien como la serie suma de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, que es una operación interna en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Habrá, pues, que recurrir al contexto general que se esté considerando para elegir la "interpretación" correspondiente de dicha igualdad, si es que no hemos explicitado su sentido.

Definición: Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es divergente sí y sólo sí es divergente la sucesión de sumas parciales $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Si $\lim_{n \to \infty} X = +\infty$

diremos que la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x$ es $+\infty$, y lo notaremos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$. Si $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ diremos que la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es $-\infty$, y lo notaremos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$.

Algunos autores utilizan el término de serie divergente como equivalente de serie no convergente.

Definición: Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es oscilante sí y sólo sí $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es convergente ni divergente.

Ejemplos.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definida por $x_n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ es convergente y su suma vale cero, ya que $X_n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definida por $x_n = 1$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ es divergente y su suma es $+\infty$, ya que $X_n = n$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definida por $x_n = (-1)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ es oscilante, ya que $X_{2n-1} = -1$ y $X_{2n} = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

La serie geométrica.

Definición: Si $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definida por $x_n = a.r^{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ la denominaremos serie geométrica de primer término a y de razón r.

Vamos a analizar la convergencia de la serie geométrica, según los distintos valores de la razón.

Caso 1: r=1

En este caso, la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de sumas parciales verifica $X_n = n.a$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$, luego $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es divergente (será convergente a $+\infty$ si $a > 0$ y convergente a $-\infty$ si $a < 0$); por tanto, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ es divergente si r=1.

Caso 2: $|r|<1$

En este caso $X_n = a.\frac{r^n-1}{r-1}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y, puesto que $|r| < 1$,

se verificará $\lim_{n\to\infty} r^n=0$, de donde resulta $\lim_{n\to\infty} X_n=\frac{a}{1-r}$. Por tanto, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ es convergente si $|r|<1$ y su suma es $\frac{a}{1-r}$.

Caso 3: $r > 1$

En este caso $\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$, y por tanto, la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sumas parciales, que verifica $X_n=a.\frac{r^n-1}{r-1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, será convergente a $+\infty$ o a $-\infty$, según a sea mayor o menor que cero. En consecuencia, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ es divergente si $r> 1$.

Caso 4: $r\leqslant -1$

En este caso, puesto que $X_n=a.\frac{r^n-1}{r-1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y la sucesión $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no converge ni diverge, deducimos que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ es oscilante.

Proposición 1

El conjunto $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ cuyos elementos son las series convergentes de números reales, es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respecto de las operaciones usuales.

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n\in\mathcal{S}^*\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ $\mu\in\mathbb{R}$ y notamos $z_n=\lambda x_n+\mu y_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, X la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e Y la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, teniendo presente que $Z_n=\lambda X_n+\mu Y_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n+\mu y_n)$ es convergente y, además, su suma vale $\lambda.X+\mu.Y$. □

Obsérvese, en cambio, que la suma de series divergentes no tiene porqué ser divergente ; en efecto, las series $\sum_{n=1}^{\infty} n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)$ son divergentes y la correspondiente serie suma es convergente, de suma cero. No obstante, las propiedades de las sucesiones divergentes pueden traducirse a series divergentes, a través de las sucesiones de sumas parciales; así por ejemplo, si dos series de números reales divergen y sus sumas son $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$) entonces la serie suma correspondiente es divergente y su suma es $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$).

Proposición 2

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es divergente, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n+y_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda . y_n$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R}-\{0\})$ son divergentes.

Demostración:

Basta tener presente las propiedades de las sucesiones divergentes y que si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, son, respectivamente, las sucesiones de sumas parciales de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$; $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$; $\{x_n+y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$; $\{\lambda y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ entonces se verifica

$$Z_n = X_n + Y_n \qquad y \qquad T_n = \lambda . Y_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

□

La suma de series oscilantes de números reales no tiene por qué ser oscilante; en efecto, las series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ son oscilantes y, en cambio, la correspondiente serie suma es convergente, de suma cero.

Restos de una serie de números reales

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces la serie $R_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n+k}$ recibe el nombre de serie resto n-ésimo de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Si notamos por $\{R_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de la sucesión $\{x_{n+k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ entonces se verifica $R_{n,k} = X_{n+k} - X_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ donde $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ representa la sucesión de sumas parciales de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ En efecto, para $k=1$ $R_{n,1} = x_{n+1} = X_{n+1} - X_n$ y si para $k \in \mathbb{N}^*$ es verdadera la relación $R_{n,k} = X_{n+k} - X_n$, entonces resulta $R_{n,k+1} = R_{n,k} + x_{n+k+1} = X_{n+k} - X_n + x_{n+k+1}$.

Proposición 3

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y notamos $R_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n+k}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, entonces

para cada $n_o \in \mathbb{N}^*$ se verifica:

" $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente sí y sólo sí R_{n_o} es convergente".

Además, en tal situación $\sum_{k=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^{n_o} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_o+k}$, entendiéndose dicha igualdad en $(\mathbb{R},+)$.

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es convergente y su suma es X, entonces $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ luego, para cada $n_o \in \mathbb{N}^*$, resulta $\lim_{k\to\infty} X_{n_o+k} = X$ de donde obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} R_{n_o,k} = \lim_{k\to\infty} (X_{n_o+k} - X_{n_o}) = X - X_{n_o}.$$

Por tanto, la serie R_{n_o} es convergente y su suma es $X - X_{n_o} = X - \sum_{k=1}^{n_o} x_k$.

Recíprocamente, si la serie R_{n_o} es convergente, entonces existe $\lim_{k\to\infty} R_{n_o,k}$, luego teniendo presente que $X_{n_o+k} = R_{n_o,k} + X_{n_o}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ concluimos

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_o+k} = \lim_{k\to\infty} (R_{n_o,k} + X_{n_o}) = \lim_{k\to\infty} X_k.$$

Proposición 4 □

Con las mismas notaciones que en la proposición anterior, se verifica para cada $n_o \in \mathbb{N}^*$:

" $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente sí y sólo sí R_{n_o} es divergente".

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente lo será, asímismo, la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y, por tanto, también $\{X_{n_o+k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$; luego teniendo presente que $R_{n_o,k} = X_{n_o+k} - X_{n_o}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ deducimos que la sucesión $\{R_{n_o,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es divergente; es decir, la serie R_{n_o} es divergente.

Recíprocamente si R_{n_o} es divergente lo será, asímismo, la sucesión $\{R_{n_o,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ y, puesto que $X_{n_o+k} = R_{n_o,k} + X_{n_o}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$, concluimos que la sucesión $\{X_{n_o+k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, y por tanto $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, es divergente.

□

Teorema 1 (Caracterización de Cauchy para la convergencia de una serie de números reales).

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ es convergente sí y sólo sí para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(\forall k)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \wedge k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |R_{n,k}| < \varepsilon),$$

donde $\{R_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es la sucesión de sumas parciales de la sucesión $\{x_{n+k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R})$ entonces $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente, luego para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(\forall m)(n \in \mathbb{N}^* \wedge m \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \wedge m \geq n_o \Rightarrow |X_n - X_m| < \varepsilon)$$

de donde, si $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_o$, $k \in \mathbb{N}^*$ resulta $|R_{n,k}| = |X_{n+k} - X_n| < \varepsilon$.

Recíprocamente, si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\forall n)(\forall k)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \wedge k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |R_{n,k}| < \varepsilon)$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n_o$ (sin que ello implique ninguna restricción podemos suponer $m > n$, es decir $m = n+k$ para un cierto $k \in \mathbb{N}^*$) se verificará $|X_n - X_m| = |X_n - X_{n+k}| = |R_{n,k}| < \varepsilon$ luego $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión de Cauchy de números reales y, por tanto, convergente.

□

Proposición 5

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ es convergente, entonces $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

Demostración

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R})$ y su suma es X, entonces teniendo presente que $x_n = X_n - X_{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ (considerando $X_o = 0$) resulta

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} (X_n - X_{n-1}) = X - X = 0.$$

□

El recíproco de la proposición anterior es falso; en efecto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (denominada serie armónica) es divergente y su suma es $+\infty$, ya que para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica

$$R_{n,n} = X_{2n} - X_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+k} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

y de la caracterización de Cauchy para la convergencia de series, deducimos que la serie armónica es no convergente. Finalmente, observando que todos los términos de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ son estrictamente positivos resultará que la correspondiente sucesión de sumas parciales será estrictamente creciente y, por tanto, si dicha sucesión es no convergente, concluimos que es convergente a $+\infty$. Conclusión: la serie armónica es divergente y su suma es $+\infty$.

Series telescópicas de números reales

Definición:

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de números reales es telescópica sí y sólo sí existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de números reales verificando

$$\left[(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = y_{n+1} - y_n)\right] \vee \left[(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = y_n - y_{n+1})\right] .$$

En tal situación, diremos que la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es generada por la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Si se verifica la relación $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = y_{n+1} - y_n)$ entonces diremos que la serie telescópica es del tipo I, y si se verifica $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = y_n - y_{n+1})$ entonces diremos que es del tipo II.

Es interesante observar que:

a) Una serie telescópica puede ser simultáneamente de ambos tipos.

b) Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es telescópica del tipo I generada por $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sí y sólo sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-x_n)$ es telescópica del tipo II generada por $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie telescópica del tipo I (respectivamente, del tipo II) generada por $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, entonces

$X_n=y_{n+1}-y_1 \quad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ (respectivamente, $X_n=y_1-y_{n+1} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$).

En efecto:

$$X_n=x_1+\ldots+x_n=(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\ldots+(y_{n+1}-y_n)=y_{n+1}-y_1 \quad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*).$$

Proposición 6

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ una serie telescópica del tipo I generada por la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. En tal situación, son equivalentes las proposiciones:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y su suma es $X\in\mathbb{R}$.

b) La sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite es $y_1+X\in\mathbb{R}$.

Demostración:

Teniendo presente la relación $(\forall n)\ (n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow X_n=y_{n+1}-y_1)$ deducimos que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite es $X\in\mathbb{R}$ sí y sólo sí la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite es $y_1+X\in\mathbb{R}$.

□

Corolario

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ una serie telescópica del tipo II generada por la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. En tal situación, son equivalentes las proposiciones:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y su suma es $X\in\mathbb{R}$.

b) La sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite es $y_1-X\in\mathbb{R}$.

En efecto: basta aplicar la proposición anterior a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-x_n)$.

□

Ejemplo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n.(n+1)}$ es convergente y su suma vale 1.

Si notamos $y_n=\dfrac{1}{n}$ $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ entonces se verifica

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = y_n - y_{n+1} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*).$$

Por tanto, la serie dada es una serie telescópica del tipo II generada por la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$ es convergente y su suma es $\frac{1}{1} - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1$.

Introducción y supresión de paréntesis en una serie

El concepto de serie de números reales nos ha permitido extender la suma ordinaria de números reales al caso de un número infinito numerable de sumandos. Ahora bien, la tal "suma" no tiene un comportamiento formalmente idéntico, si bien bastante similar, al de la suma ordinaria. Por ejemplo, la serie $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ cuyo término general es $x_n = 1-1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ trivialmente converge y su suma vale cero; es decir, podemos escribir $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$ Ahora bien, si intentamos aplicarle al primer miembro de la anterior "igualdad" la propiedad asociativa obtendríamos $1-(1-1)-(1-1)-\ldots$ que es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ definida por $y_1 = 1$ e $y_n = 0 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0,1\})$, que es convergente y su suma vale 1.

Si, en cambio, pretendemos "quitar paréntesis" en dicho miembro obtendríamos $1-1+1-1+1-1+\ldots$, es decir la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ que es oscilante. Pues bien, a continuación vamos a precisar lo que entenderemos por introducir o suprimir paréntesis en una serie de números reales y estableceremos condiciones suficientes para que en una determinada serie sea factible la introducción o supresión de paréntesis, conservándose la convergencia y la suma de la serie original.

Definición: Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ son tales que existe una aplicación $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*;\ \mathbb{N}^*)$ estrictamente creciente, respecto de la ordenación usual de $\mathbb{N}^*$, verificando:

$$(y_1 = \sum_{k=1}^{\varphi(1)} x_k) \wedge ((\forall\, n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y_{n+1} = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} x_k))$$

entonces diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ se ha obtenido de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ introduciendo paréntesis a partir de φ, o bien diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se ha obtenido de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ suprimiendo paréntesis a partir de φ.

Ejemplo:

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ y la aplicación $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ definida por $\varphi(n)=2n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, que es estrictamente creciente. En tal situación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ deducida de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ introduciendo paréntesis a partir de φ verificaría la condición

$$(y_1=x_1+x_2=1-1=0) \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y_{n+1}=x_{2n+1}+x_{2n}=1-1=0)) .$$

Por tanto, si "representamos" la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ así

$$1-1+1-1+1-1+....$$

entonces la aplicación φ introduce paréntesis de la siguiente forma

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+ ....$$

Si, en cambio, fuera $\varphi(n)=3n$ introduciría paréntesis así

$$(1-1+1)+(-1+1-1)+(1-1+1)+....$$

Proposición 7

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es una serie deducida de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ introduciendo paréntesis a partir de una cierta aplicación estrictamente creciente $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente y su suma coincide con la de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{\varphi(n)} x_k = X_{\varphi(n)}$$

y teniendo presente que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente y $\{X_{\varphi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$

es una sucesión parcial de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ concluimos que $\{X_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, y por tanto $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, es convergente y su límite coincide con el de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

□

Resulta, pues, de la proposición anterior que si en una serie convergente introducimos paréntesis entonces se conserva la convergencia y la suma; en cambio no ocurre lo mismo con la supresión de paréntesis: en efecto, según hemos visto en el ejemplo anterior, la serie deducida de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ introduciendo paréntesis por la aplicación $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$: $\varphi(n)=2n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ es $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ siendo $y_n=0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ es convergente mientras que la serie deducida de ésta mediante la supresión de paréntesis a partir de φ (la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$) es oscilante.

A continuación, estableceremos una condición suficiente para que la introducción o supresión de paréntesis conserve la convergencia y la suma de la serie (obsérvese que dicha condición es relativa a la serie de partida y a la "forma" de introducir o suprimir paréntesis en dicha serie, es decir, relativa a la aplicación estrictamente creciente $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$).

Teorema 2

Sean $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ series de números verificando:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ es obtenida de $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ introduciendo paréntesis a partir de una aplicación $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ estrictamente creciente.

ii) $(\exists M)(M\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}\ \wedge(\forall n)(n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\varphi(n+1)-\varphi(n)<M)$.

iii) $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$.

En tal situación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ es convergente sí y sólo sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ es convergente. Además, las sumas de ambas series coinciden.

Demostración:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ también lo es y su suma coincide con la de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es deducida de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mediante la introducción de paréntesis a partir de φ .

Recíprocamente, supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ es convergente y notemos su suma por Y; para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+} - \{0\}$ existirán $n_o \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow |Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2}) \wedge (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_1 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2M})$$

Sea $n_2 = \text{máx}\ \{n_o, n_1\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq \varphi(n_2)$ notemos

$C_n = \{p : (p \in \mathbb{N}^*) \wedge (\varphi(p) < n)\}$. Resulta $n_2 \in C_n$ y n es cota superior de C_n, ya que si $n' \in \mathbb{N}^* \wedge n' > n$ entonces $\varphi(n') > \varphi(n) \geq n$ y, por tanto, $n' \notin C_n$. Si $a_n = \text{máx}\ C_n$ deducimos

$$n_2 \leq a_n < \varphi(a_n) < n < \varphi(a_n + 1)$$

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq \varphi(n_2)$ se verificará

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\varphi(a_n+1)} x_k - \sum_{k=n+1}^{\varphi(a_n+1)} x_k = X_{\varphi(a_n+1)} - \sum_{k=n+1}^{\varphi(a_n+1)} x_k$$

luego, para cada $n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq \varphi(n_2)$ obtendremos

$$|X_n - Y| \leq |Y_{a_n+1} - Y| + \sum_{k=n+1}^{\varphi(a_n+1)} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2} + [\varphi(a_n+1) - n] \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + [\varphi(a_n+1) - \varphi(a_n)] \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

lo que demuestra $\lim_{n \to \infty} X_n = Y$. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y su suma coincide con la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

□

Para finalizar el presente parágrafo, vamos a demostrar que el carácter de una serie de números reales que posee infinitos términos distintos de cero, y su suma en caso de ser convergente, no se altera cuando "eliminamos" de dicha serie los términos que son iguales a cero.

Proposición 8

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}^* : x_n \neq 0\}$ es infinito. Sea $n_1 = \min\{p \in \mathbb{N}^* : x_p \neq 0\}$ y definamos recurrentemente, para cada $k \in \mathbb{N}^*$: $n_{k+1} = \min\{p \in \mathbb{N}^* : p > n_k \wedge x_p \neq 0\}$. En tal situación, las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ poseen el mismo carácter (convergente, divergente u oscilante) y, en su caso, la misma suma.

Demostración:

Notemos $y_k = x_{n_k}$ e $Y_k = y_1 + \ldots + y_k = x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$. Ahora bien, de la definición de los n_k $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ resulta que $Y_k = x_{n_1} + \ldots + x_{n_k} = X_{n_k}$; en consecuencia $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión parcial de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, de donde deducimos:

i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y su suma es $X \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es convergente y su suma es $X \in \mathbb{R}$.

ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente y su suma es $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$), entonces $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es divergente y su suma es $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$).

Por otra parte, si $k_o \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_{k_o}$ entonces existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $k \geq k_o \wedge X_n = Y_k$.

Por tanto, la relación $(\forall k)\ (k \in \mathbb{N}^* \wedge k \geq k_o \Rightarrow |Y_k - Y| < \varepsilon)$ implica $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_{k_o} \Rightarrow |X_n - Y| < \varepsilon)$; es decir que si $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es convergente y su suma es $Y \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y su suma es $Y \in \mathbb{R}$.

Asímismo, la relación $(\forall k)(k \in \mathbb{N}^* \wedge k \geq k_o \Rightarrow Y_k > \varepsilon)$ implica $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_{k_o} \Rightarrow X_n > \varepsilon)$; es decir que si $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es diver-

gente y su suma es $+\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente y su suma es $+\infty$. De manera similar resulta el caso en que $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es divergente y su suma es $-\infty$.

□

Así pues, la proposición anterior nos permite prescindir en una serie de números reales que posea infinitos términos distintos de cero, a efectos del análisis de su carácter y obtención de su suma, de todos los términos de la serie que sean iguales a cero.

Téngase presente que si una serie de números reales posee únicamente un número finito de términos distintos de cero, entonces la correspondiente sucesión de sumas parciales es cuasi-constante y, por tanto, dicha serie es convergente.

§ 3: SERIES DE TERMINOS POSITIVOS.

El objetivo del presente parágrafo es el estudio del carácter (convergencia o divergencia) de series de números reales tales que todos sus términos son positivos. Puesto que la sucesión de sumas parciales que define una tal serie es creciente, será convergente o divergente; por tanto una serie de números reales de términos positivos nunca puede ser oscilante: o es convergente o es divergente. Es interesante observar que el estudio del carácter de una serie de números reales tal que todos sus términos son negativos, se reduce al estudio del carácter de la serie de términos positivos deducida de ésta al multiplicar todos sus términos por -1.

Notaremos por $\mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ (respectivamente, $\mathscr{S}^-(\mathbb{R})$) al conjunto cuyos elementos son las series de números reales tales que todos sus términos son positivos (respectivamente, negativos).

Definición:

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ es una serie mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (o equivalentemente, que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una serie minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$) sí y sólo sí existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando:

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow y_n \leqslant x_n)$$

Proposición 1

Una serie de números reales de términos positivos es convergente sí y sólo sí la sucesión de sumas parciales que la define está acotada.

Demostración:

Basta observar que la sucesión de sumas parciales que define una serie de términos positivos es creciente, y que una sucesión creciente

de números reales es convergente sí y sólo sí está acotada.

□

Criterio de comparación

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$. En tal situación:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una serie minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una serie mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente.

Demostración:

a) Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y notemos X su suma; puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una serie minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow y_n \leqslant x_n)$ de donde resulta

$$(\forall n)\quad (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow Y_n - Y_{n_o} \leqslant X_n - X_{n_o})$$

luego $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow Y_n \leqslant X_n - X_{n_o} + Y_{n_o} \leqslant X - X_{n_o} + Y_{n_o})$.

Por tanto, la sucesión $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada, es decir la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente, entonces la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ no esta acotada superiormente; puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una serie mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow y_n \geqslant x_n)$$

de donde resulta

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow Y_n - Y_{n_o} \geqslant X_n - X_{n_o})$$

es decir

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow Y_n \geqslant Y_{n_o} + X_n - X_{n_o}).$$

De donde deducimos que la sucesión $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ no está acotada superiormente, por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es no convergente, luego es divergente.

□

Ilustremos el criterio de comparación con algunos ejemplos:

1.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ es convergente y su suma es menor o igual que 1.

En efecto: basta tener presente que

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n.(n+1)} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

y que según vimos en el ejemplo de la pág. 492 del parágrafo anterior, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$ es convergente y su suma vale 1.

2.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente y su suma es menor o igual que 2.

En efecto: basta tener presente que

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

y que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ es una serie geométrica de primer término 1 y de razón 1/2.

3.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ es divergente si α es un número real menor o igual que 1 (para la justificación de la notación n^{α} véase la introducción de la función exponencial en la página 512).

En efecto: basta tener presente que si $\alpha \leqslant 1$:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{n} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

Criterio de comparación generalizado.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{C}^+(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{C}^+(\mathbb{R})$ tales que $y_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. En tal situación:

a) Si $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ poseen el mismo carácter.

b) Si $\lambda = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

c) Si $\lambda = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

Demostración:

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $\lambda - \varepsilon > 0$; aplicando la definición de límite a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ deducimos la existencia de $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow 0 < \lambda - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \lambda + \varepsilon)$$

es decir

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow 0 < (\lambda - \varepsilon) y_n < x_n < (\lambda + \varepsilon) y_n)$$

Si suponemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \varepsilon) y_n$, minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, será convergente y, puesto que $\lambda - \varepsilon \neq 0$, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + \varepsilon) y_n$, mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, será divergente y, puesto que $\lambda + \varepsilon \neq 0$, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sea convergente. En tal situación, $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + \varepsilon) y_n$ será convergente y, puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + \varepsilon) y_n$, deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

Finalmente, si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente resulta que también lo será $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \varepsilon) y_n$, ya que $\lambda - \varepsilon \neq 0$; por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \varepsilon) . y_n$, será divergente.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, dado $\varepsilon = 1$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow 0 \leq \frac{x_n}{y_n} < 1)$$

Es decir $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow 0 \leq x_n < y_n)$.
Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, convergente por hipótesis; por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

c) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, dado $\varepsilon = 1$ existirá $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > 1)$ es decir

$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n > y_n)$.

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, divergente por hipótesis; por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

□

Ejemplos

1.- Si $n_o \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ y $x_{n_o} \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ entonces la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n_o-1).x_{n_o}}{n_o-1+k}$ es divergente ya que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{(n_o-1)x_{n_o}}{n_o-1+k}}{\frac{1}{k}} = (n_o-1).x_{n_o} \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

y, por tanto, las series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(no-1)x_{no}}{n_o-1+k}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ poseen el mismo carácter.

2.- Si $a > 0$, $b \geq 0$, $\alpha \leq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a.n+b)^{\alpha}}$ es

divergente, ya que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(a.n+b)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \frac{1}{a^{\alpha}} \in R^+ - \{0\}$$ y, por tanto, las series

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a.n+b)^{\alpha}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ poseen el mismo carácter.

3.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ es convergente, ya que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n!)^2}}{\frac{1}{n!}} = 0$$ y, además, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

4.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+\sqrt{n}}$ es divergente, ya que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{5+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = +\infty$$ y, además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Proposición 2

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales positivos. En tal situación:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ es convergente.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente y existen $M \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $n_o \in \mathbb{N}^*$ tales que $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow y_n \geq M)$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ es divergente.

Demostración:

a) Puesto que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada existirá $M' \in \mathbb{R}^+$ tal que $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y_n \leq M')$, de donde resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} M' x_n$, convergente por serlo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ es convergente.

b) Puesto que $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow 0 < M \leq y_n)$ resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ es mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} M \cdot x_n$. Ahora bien, teniendo presente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente y que $M > 0$ deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} M x_n$ es divergente; por tanto, del criterio de comparación concluimos la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$.

□

Corolario

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R})$. En tal situación:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)\left(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n \neq 0 \wedge y_n \neq 0 \wedge \frac{y_{n+1}}{y_n} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente y existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall\, n)\left(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow x_n \neq 0 \wedge y_n \neq 0 \wedge \frac{y_{n+1}}{y_n} \geqslant \frac{x_{n+1}}{x_n}\right),$$ entonces

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente.

Demostración:

a) Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_o$ se verifica $\frac{y_{n+1}}{y_n} \leqslant \frac{x_{n+1}}{x_n}$ y por tanto $\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \leqslant \frac{y_n}{x_n}$, deducimos que la sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida por $z_n = 0$ si $n < n_o$ y $z_n = \frac{y_n}{x_n}$ si $n \geqslant n_o$ está acotada; luego, teniendo presente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, concluimos de la proposición anterior que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot z_n$ es convergente, de donde resulta la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

b) Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_o$ se verifica

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \geqslant \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{y por tanto} \quad \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \geqslant \frac{y_n}{x_n},$$

deducimos que la sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida por

$$z_n = 0 \text{ si } n < n_o \quad \text{y} \quad z_n = \frac{y_n}{x_n} \text{ si } n \geqslant n_o$$

es tal que $(\forall\, n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow z_n \geqslant z_{n_o} = \frac{y_{n_o}}{x_{n_o}} > 0)$; luego, teniendo presente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente, concluimos de la proposición anterior que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot z_n$ es divergente, de donde resulta la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. □

Criterio del cociente (D'Alembert)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{C}^+(\mathbb{R})$ tal que $x_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y notemos

$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\mu = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. En tal situación:

a) Si $\lambda < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

b) Si $\mu > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

Demostración:

a) Si $\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $\lambda + \varepsilon < 1$ y, por tanto, de la definición de límite superior deducimos la existencia de $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < \lambda + \varepsilon)$ es decir $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_{n+1} < (\lambda + \varepsilon).x_n)$; de esta relación resulta $x_{n_o+k} < (\lambda + \varepsilon)^k . x_{n_o} \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*)$. Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida por $y_n = 0$ sí $n \leq n_o$ e $y_{n_o+k} = (\lambda + \varepsilon)^k . x_{n_o}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$. Trivialmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Teniendo presente que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente, ya que posee una serie resto convergente ($R_{n_o} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda + \varepsilon)^k . x_{n_o}$ es una serie geométrica de razón $\lambda + \varepsilon$ $(0 < \lambda + \varepsilon < 1)$) concluimos del criterio de comparación que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

b) Si $\mu = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $\mu - \varepsilon > 1$ y por tanto, de la definición de límite inferior deducimos la existencia de $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > \mu - \varepsilon)$ es decir $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_{n+1} > (\mu - \varepsilon).x_n)$; de donde resulta $x_{n_o+k} > (\mu - \varepsilon)^k . x_{n_o}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$. Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida por $y_n = 0$ si $n \leq n_o$ e $y_{n_o+k} = (\mu - \varepsilon)^k . x_{n_o} (\forall k \in \mathbb{N}^*)$. Trivialmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Teniendo presente que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente, ya que posee una serie resto divergente ($R_{n_o} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu - \varepsilon)^k . x_{n_o}$ es una serie geométrica de razón $\mu - \varepsilon > 1$) concluimos del criterio de comparación que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es di-

vergente. □

Ejemplos.

1.- Si $x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ es convergente ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = 0$.

2.- Si $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^n$, entonces resulta $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha} x^{n+1}}{n^{\alpha} x^n} = x$, por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^n$ converge si $x < 1$ y diverge si $x > 1$.

Criterio de la raiz (Cauchy)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ y notamos $\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$. En tal situación:

a) Si $\lambda < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

b) Si $\lambda > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

Demostración:

a) Si $\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} < 1$ entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $\lambda + \varepsilon < 1$ y, por tanto, de la definición de límite superior deducimos la existencia de $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} < \lambda + \varepsilon)$

es decir, $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow x_n < (\lambda + \varepsilon)^n)$. Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida por $y_n = 0$ si $n \leq n_o$ e $y_{n_o+k} = (\lambda+\varepsilon)^{n_o+k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Trivialmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Teniendo presente que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente, ya que posee una serie de resto convergente ($R_{n_o} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda+\varepsilon)^{n_o+k}$ es una serie geométrica de razón $\lambda + \varepsilon (0 < \lambda + \varepsilon < 1)$) concluimos del criterio de comparación que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

b) Si $\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} > 1$ entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $\lambda - \varepsilon > 1$ y, por tanto, de la definición de límite superior, deducimos que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists n')(n' \in \mathbb{N}^* \wedge n' > n \wedge \sqrt[n']{x_{n'}} > \lambda - \varepsilon))$. Dicho con otras palabras: existen infinitos términos de la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ verificando la condición $\sqrt[n]{x_n} > \lambda - \varepsilon$; es decir, existen infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ verificando $x_n > (\lambda - \varepsilon)^n > 1$, luego la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ no converge a cero, de donde resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es no convergente y por ser de términos positivos, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

□

Obsérvese que de la proposición 12 (cap. X; § 3; pág. 441) deducimos que el criterio de la raíz es más "potente" que el del cociente, en el sentido de que siempre que sea aplicable el criterio del cociente a una determinada serie de números reales será, asímismo, aplicable el criterio de la raíz. Más aún , el criterio del cociente puede no asegurar nada acerca del carácter de una serie a la que es aplicable el criterio de la raíz. En efecto, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$ definida así $x_n = \frac{1}{2^k}$ si $n = 2k-1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ y $x_n = \frac{1}{3^k}$ si $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. En tal situación, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{3^k} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{2^k} = +\infty$$

de donde resulta que el criterio del cociente no asegura nada acerca del carácter de dicha serie y, en cambio, el criterio de la raiz nos asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

Ejemplos.

1.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ es convergente ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = 0$.

2.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n.x^n$ $(x \in \mathbb{R}^+ - \{0\})$ es convergente si $x < 1$ y divergente si $x > 1$ ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n.x^n} = x$.

Criterio de Raabe

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{O}^+(\mathbb{R})$ tal que $x_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y notemos

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n.\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \quad , \quad \mu = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ n.\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right).$$

En tal situación:

a) Si $\lambda < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

b) Si $\mu > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

Demostración:

a) Supongamos que $\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n.\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1$ y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $\lambda + \varepsilon < 1$. De la definición de límite superior deducimos la existencia de $n_o \in \mathbb{N}^*$ (podemos suponer $n_o > 1$) verificando $(\forall\, n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow n.\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < \lambda + \varepsilon < 1)$ es decir

$(\forall\, n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow x_{n+1} > \frac{n-1}{n} x_n)$ de donde resulta

$$x_{n_o+k} > \frac{n_o-1}{n_o+k-1}\, x_{n_o} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}^*).$$

Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $y_n = 0$ si $n \leqslant n_o$ e $y_{n_o+k} = \frac{n_o-1}{n_o+k-1}.x_{n_o}$ $(\forall\, k \in \mathbb{N}^*)$. Trivialmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Teniendo presente que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente, ya que posee una serie resto divergente $(R_{n_o} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_o-1}{n_o+k-1}.x_{n_o}$, ver ejemplo 1 de la página 503) concluimos del criterio de comparación la divergencia de la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

b) Si $\mu = \varliminf_{n\to\infty} n\,.\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$, sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $\mu - \varepsilon > 1$ y notemos $t = \mu - (1+\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. De la definición de límite inferior deducimos la existencia de $n_o \in \mathbb{N}^*$ (podemos suponer $n_o > 1$) verificando

$$(\forall\, n)\left(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow n.\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > \mu - t = 1+\varepsilon\right)$$

de donde resulta

$$(\forall\, n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow (n-1)x_n - n.x_{n+1} > x_n.\varepsilon).$$

Ahora bien, de esta relación obtenemos

$$(n_o+j-1)x_{n_o+j} - (n_o+j)x_{n_o+j+1} > \varepsilon.x_{n_o+j} \qquad (\forall\, j \in \mathbb{N})$$

sumando miembro a miembro las desigualdades, desde j=0 a j=k, deducimos

$$\sum_{j=0}^{k} \left[(n_o+j-1)x_{n_o+j} - (n_o+j)x_{n_o+j+1}\right] > \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{k} x_{n_o+j}$$

Es decir

$$(n_o-1)x_{n_o} - (n_o+k)x_{n_o+k+1} > \varepsilon\,.\,(X_{n_o+k} - X_{n_o-1}) \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N}^*)$$

de donde resulta

$$X_{n_o+k} < \frac{(n_o-1)x_{n_o} - (n_o+k)x_{n_o+k+1}}{\varepsilon} + X_{n_o-1} < \frac{n_o-1}{\varepsilon}\, x_{n_o} + X_{n_o-1} \qquad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$$

Luego la sucesión $\{X_{n_o+k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, y por tanto $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, está acotada. Conclusión: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

□

Ejemplos:

1.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+3}$ es convergente ya que

$$\lim_{n\to\infty}\; n.\left(1-\frac{\frac{5}{(n+1)^2+3}}{\frac{5}{n^2+3}}\right) = 2$$

2.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a.(a+1)...(a+n-1)}{b.(b+1)...(b+n-1)}$ $(a,b \in \mathbb{R}^+ - \{0\})$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(1- \frac{\frac{a.(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)}}{\frac{a.(a+1)...(a+n-1)}{b.(b+1)...(b+n-1)}}\right) = \lim_{n\to\infty} n.(1- \frac{a+n}{b+n}) = b-a \ ,$$

por tanto es convergente si $b-a > 1$ y divergente si $b-a < 1$.

Criterio de condensación de Cauchy

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}^+(\mathbb{R})$ tal que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente. En tal situación

"$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente sí y sólo sí $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x_{2n-1}$ es convergente".

Demostración:

Notemos por $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de $\{2^{n-1} x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ y $k \in \mathbb{N}^*$ son tales que $n < 2^k$, entonces

$$X_n = x_1+x_2+x_3+....+x_n \leq x_1+(x_2+x_3)+...+(x_{2^k}+...+x_{2^{k+1}-1}) \leq$$

$$\leq x_1+2x_2+...+2^k x_{2^k} = \sum_{j=1}^{k+1} 2^{j-1} x_{2^{j-1}} = Y_{k+1}$$

de donde resulta que la acotación de la sucesión $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ implica la acotación $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}^*$ y $k \in \mathbb{N}^*$ son tales que $n > 2^k$, entonces

$$X_n = x_1+x_2+x_3+x_4+....+x_n \geq x_1+x_2+(x_3+x_4)+...+(x_{2^{k-1}+1}+...+x_{2^k}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} x_1+x_2+2x_{2^2}+...+2^{k-1}x_{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+1} 2^{j-1} x_{2^{j-1}} = \frac{1}{2} Y_{k+1}$$

de donde resulta que si $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es no acotada, entonces $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es no acotada.

En definitiva, la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada sí

y sólo sí lo está $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente sí y sólo sí lo es $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x_{2^{n-1}}$.

□

Es interesante observar que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x_{2^{n-1}}$ es convergente sí y sólo sí lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$.

Una generalización del presente criterio puede encontrarse en el problema 44 de este capítulo.

Función exponencial, logarítmica y potencial de variable real

Para el desarrollo de determinadas cuestiones (análisis de la serie armónica generalizada, criterio de Pringsheim, elaboración de ciertos ejemplos, etc.) necesitamos algunas funciones reales de una variable real (exponencial, logarítmica, potencial) cuya introducción rigurosa y posterior estudio deben realizarse en el marco de una teoría general de funciones reales que no es un objetivo del presente texto.

Función exponencial

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$ entonces admitiremos la existencia de un isomorfismo algebraico de $(\mathbb{R},+)$ en $(\mathbb{R}^+ - \{0\},\cdot)$, que notaremos $\exp_a$ y denominaremos función exponencial de base a y variable real, verificando las condiciones:

i) $\exp_a(1)=a$.

ii) Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $\exp_{\exp_a(x)}(y)=\exp_a(x.y)$.

iii) Si $a \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ entonces $\exp_{a|\mathbb{N}}$ coincide con la función exponencial de base a y exponente natural.

iv) Si $0 < a < 1$ entonces $x < y \Rightarrow \exp_a(x) > \exp_a(y)$

v) Si $a > 1$ entonces $x < y \Rightarrow \exp_a(x) < \exp_a(y)$

Notaremos $\exp_a(x)=a^x$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$. Asímismo, convendremos en notar $1^x=1$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$ y $0^x = 0$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^+ - \{0\})$.

Función logarítmica

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$ entonces la aplicación inversa de $\exp_a$, que notaremos $\lg_a$, recibe el nombre de función logarítmica de base a y variable real.

Función potencial

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$ y $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces la aplicación P_k de $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ en $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ definida por $P_k(x) = a^{k.\lg_a(x)}$ recibe el nombre de función potencial de exponente k y variable real (la definición anterior es independiente del número real $a \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$ considerado).

Notaremos $P_k(x) = x^k$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^+ - \{0\})$. Asímismo, convendremos en notar $x^0 = 1$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^+ - \{0\})$.

Resulta que

i) si $k < 0$ entonces $x < y \Rightarrow x^k > y^k$

ii) si $k > 0$ entonces $x < y \Rightarrow x^k < y^k$

La serie armónica generalizada de exponente $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definición: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ recibe el nombre de serie armónica generalizada de exponente $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para el estudio del carácter de dicha serie distinguiremos dos casos.

Caso 1: $\alpha \leqslant 1$.

Según vimos en el ejemplo 3 del criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ es divergente si $\alpha \leqslant 1$.

Caso 2: $\alpha > 1$.

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha$ cuyo término general es

$2^{n(1-\alpha)}=(2^{1-\alpha})^n$: se trata de una serie geométrica de razón $2^{1-\alpha}<1$. Teniendo presente que la sucesión $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente, del criterio de condensación de Cauchy deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ es convergente si $\alpha>1$.

Criterio de Pringsheim

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathcal{J}^+(\mathbb{R})$. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^\alpha x_n\in\mathbb{R}$ y $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ n^\beta x_n\in\mathbb{R}-\{0\}$ En tal situación:

a) Si $\alpha>1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ es convergente.

b) Si $\beta\leqslant 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ es divergente.

Demostración:

a) Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>1$ tal que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^\alpha x_n=\lambda\in\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon=1$ existirá $n_o\in\mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall\, n)\ (n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow n^\alpha x_n<\lambda+1)$$

es decir $(\forall\, n)\ (n\in\mathbb{N}^*\wedge n\geqslant n_o\Rightarrow x_n<\frac{\lambda+1}{n^\alpha})$.

Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $y_n=\frac{\lambda+1}{n^\alpha}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ Trivialmente, $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ y puesto que $\alpha>1$ deducimos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ y, por tanto, de $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$. Finalmente, del criterio de comparación concluimos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$.

b) Sea $\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\leqslant 1$ tal que $\mu=\underline{\lim_{n\to\infty}}\ n^\beta x_n\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ y sea $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ verificando $\mu-\varepsilon>0$. De la definición de límite inferior deducimos la existencia de $n_o\in\mathbb{N}^*$ tal que

$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow n^\beta x_n > \mu - \varepsilon)$

es decir $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow x_n > \frac{\mu-\varepsilon}{n^\beta})$.

Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por $y_n = \frac{\mu-\varepsilon}{n^\beta}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Trivialmente, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, y puesto que $\beta \leqslant 1$ resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ es divergente, luego también lo será $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ya que $\mu - \varepsilon > 0$. Finalmente, del criterio de comparación concluimos la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. □

Téngase presente que del criterio de Pringsheim deducimos que si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{O}^+(\mathbb{R})$ es convergente, entonces el límite inferior de la sucesión $\{n.x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (que existe por estar acotada inferiormente dicha sucesión) ha de ser igual a cero. A continuación vamos a demostrar que si, además $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente entonces podemos concluir que el límite de la sucesión $\{n.x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es cero.

Proposición 3

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{O}^+(\mathbb{R})$ es una serie convergente y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente, entonces $\lim_{n\to\infty} n.x_n = 0$.

Demostración:

Si notamos X la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, resultará $\lim_{n\to\infty} X_{2n} = X$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} (X_{2n} - X_n) = 0$. Ahcra bien, teniendo presente que

$$X_{2n} - X_n = x_{n+1} + \ldots + x_{n+n} \geqslant n.x_{2n} \geqslant 0$$

de la relación $\lim_{n\to\infty} (X_{2n} - X_n) = 0$ deducimos $\lim_{n\to\infty} n.x_{2n} = 0$, es decir $\lim_{n\to\infty} 2n.x_{2n} = 0$.

Por otra parte, se verifica $x_{2n+1} \leqslant x_{2n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ de donde obtenemos

$$0 \leqslant (2n+1)x_{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2n}\, 2n.x_{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

y puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1 \wedge \lim_{n\to\infty} 2n.x_{2n} = 0$

deducimos $\lim_{n\to\infty}(2n+1)x_{2n+1}=0$. Luego, para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ existirán $n_o \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow 2n\, x_{2n} < \varepsilon) \wedge (\forall n)(n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow (2n+1).x_{2n+1} < \varepsilon).$$

Si notamos $n_2=$máx $\{n_o, n_1\}$ concluimos, finalmente,

$(\forall n)\ (n\in\mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_2 \Rightarrow n.x_n < \varepsilon)$; es decir $\lim_{n\to\infty} n.x_n=0$.

□

Acabamos, pues, de probar que la condición $\lim_{n\to\infty} n.x_n=0$ es necesaria para la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R})$, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente; en cambio, dicha condición no es suficiente. En efecto: basta considerar la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}$.

Trivialmente, se trata de una serie de términos positivos tal que $\{\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\lg(n+1)} = 0$. No obstante, teniendo presente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n.\frac{1}{2^n.\lg 2^n}$ es divergente, del criterio de condensación de Cauchy deducimos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}$ es divergente.

Teorema 1

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R})$ tal que $(x_1 > 0) \wedge (\exists k)(k\in\mathbb{N}^* \wedge X_k \geqslant 1)$. En tal situación, para cada $\alpha\in\mathbb{R}^+-\{0\}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha}}$ es convergente.

Demostración:

Sea $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{n_o} < \alpha$ y notemos $\beta = \frac{1}{n_o}$. Si $n\in\mathbb{N}^*$ es tal que $n \geqslant k$, entonces resulta:

$$\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha}} \leqslant \frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\beta}} = \frac{X_{n+1}-X_n}{X_{n+1}.X_n^{\beta}} = \frac{1}{X_n^{\beta}} - \frac{X_n}{X_{n+1}.X_n^{\beta}} =$$

$$= \frac{1}{X_n^{\beta}}\cdot\left[1-\frac{X_n}{X_{n+1}}\right] = \frac{1}{X_n^{\beta}}\cdot\left[1-\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right)^{\beta\cdot n_o}\right].$$

Ahora bien, teniendo presente que si $o \leqslant y < 1$, $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica

$1-y^n=(1-y)(1+y+\ldots+y^{n-1}) \leqslant n.(1-y)$ y que $0<\frac{X_n}{X_{n+1}}\leqslant 1 \quad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$, deducimos para cada $n\geqslant k$:

$$\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{X_n^{\beta}}\cdot\left[n_o\cdot\left(1-\frac{X_n^{\beta}}{X_{n+1}^{\beta}}\right)\right]=n_o\cdot\left(\frac{1}{X_n^{\beta}}-\frac{1}{X_{n+1}^{\beta}}\right).$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n_o\cdot\left(\frac{1}{X_n^{\beta}}-\frac{1}{X_{n+1}^{\beta}}\right)$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha}}$.

La sucesión $\{\frac{1}{X_n^{\beta}}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente, tanto si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge como si diverge ya que si $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge, su suma X debe ser distinta de cero luego $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{X_n^{\beta}}=\frac{1}{X^{\beta}}$, y si $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=+\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{X_n^{\beta}}=0$. Del corolario de la proposición 6(§ 2) de este capítulo (pág.492), deducimos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}n_o\cdot\left(\frac{1}{X_n^{\beta}}-\frac{1}{X_{n+1}^{\beta}}\right)$, y del criterio de comparación concluimos la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha}}.$$

□

Proposición 4

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathscr{O}^{\rho}_{+}(\mathbb{R})$ es divergente y $x_1>0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{X_n^{\alpha}}$ es convergente si $\alpha>1$ y divergente si $\alpha\leqslant 1$.

Demostración:

Supongamos $\alpha>1$. Puesto que

$$\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}^{\alpha}}=\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_{n+1}^{\alpha-1}}\leqslant\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha-1}}$$

resulta que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha-1}}$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}^{\alpha}}$ y teniendo presente que $\alpha-1>0$ y $\lim_{n\to\infty}X_n=+\infty$, del teorema anterior deducimos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}.X_n^{\alpha-1}}$; por tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{X_n^{\alpha}}$ es convergente.

Si $\alpha=1$ y notamos $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de $\left\{\frac{x_n}{X_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, entonces se verifica:

$$Y_{n+k}-Y_n=\frac{x_{n+1}}{X_{n+1}}+\ldots+\frac{x_{n+k}}{X_{n+k}}\geqslant\frac{x_{n+1}+\ldots+x_{n+k}}{X_{n+k}}=1-\frac{X_n}{X_{n+k}}\quad(\forall k\in\mathbb{N}^*).$$

Ahora bien, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=+\infty$ luego $\lim_{k\to\infty}X_{n+k}=+\infty$ y, por tanto, $\lim_{k\to\infty}\frac{X_n}{X_{n+k}}=0$. Sea $k_o\in\mathbb{N}^*$ tal que $\frac{X_n}{X_{n+k_o}}<\frac{1}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, en tal situación obtenemos $Y_{n+k_o}-Y_n>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. Es decir, la sucesión $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ no es de Cauchy, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{X_n}$ es divergente.

Si $\alpha<1$ y $k\in\mathbb{N}^*$ es tal que $X_k\geqslant 1$, entonces para cada $n\in\mathbb{N}^*(n\geqslant k)$ resulta $X_n\geqslant X_k\geqslant 1$, luego $X_n^{\alpha}\leqslant X_n$ y, por tanto $\frac{x_n}{X_n}\leqslant\frac{x_n}{X_n^{\alpha}}$. En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{X_n^{\alpha}}$ es convergente. □

Como consecuencia inmediata de esta proposición puede obtenerse el carácter de la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha\in\mathbb{R}^+)$: basta aplicar la proposición anterior a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, siendo $x_n=1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

Ejemplos.

1.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1!+2!+\ldots+n!}$ es divergente ya que si $x_n=n!$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ entonces la serie considerada es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{X_n'}$.

2.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(1^1+2^2+\ldots+n^n)^2}$ es convergente ya que si $x_n=n^n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*$ entonces la serie considerada es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{X_n^2}$.

Convergencia y divergencia más o menos rápida de una serie.

Definición: Si $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty}y_n\in\mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ son series convergentes de sumas X e Y, respectivamente, verificando $X-X_n\neq 0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, entonces diremos que $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ converge más (respectivamente, menos) rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ sí y sólo sí $\lim_{n\to\infty}\frac{Y-Y_n}{X-X_n}=0$ (respectivamente, $\lim_{n\to\infty}\frac{Y-Y_n}{X-X_n}=+\infty$)

Si la sucesión $\left\{\frac{Y-Y_n}{X-X_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ posee límite superior mayor que 0 y límite inferior menor que $+\infty$, entonces diremos que las convergencias de dichas series son de la misma especie.

Ejemplo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge más rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.(n+1)}$. En efecto, si $x_n=\frac{1}{n.(n+1)}$ $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ e $y_n=\frac{1}{2^n}$ $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ entonces

$X=\sum_{n=1}^{\infty}x_n=1=\sum_{n=1}^{\infty}y_n=Y$, $X_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$, $Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}$

luego $\lim_{n\to\infty}\frac{Y-Y_n}{X-X_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/2^n}{1/_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}=0$ (puede comprobarse que $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$, directamente a partir de la definición de límite de una sucesión).

Definición: Si $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty}y_n\in\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ son series divergentes tales que $X_n\neq 0$ $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$, entonces diremos que $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ diverge más (respectivamente, menos) rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ sí y sólo si $\lim_{n\to\infty}\frac{Y_n}{X_n}=+\infty$ (respectivamente, $\lim_{n\to\infty}\frac{Y_n}{X_n}=0$).

Si la sucesión $\left\{\frac{Y_n}{X_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ posee límite superior e inferior finitos y mayores que cero, entonces diremos que las divergencias de dichas series son de la misma especie.

Ejemplo.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge menos rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

En efecto, basta tener presente que $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}=0$ (dicho límite puede calcularse, inmediatamente, aplicando el criterio de Stolz).

Proposición 5

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty}y_n\in\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ son convergentes y verifican

$x_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ (respectivamente , $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge más (respectivamente, menos) rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Demostración:

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ entonces para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\forall\, n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} < \varepsilon)$, es decir $(\forall\, n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow y_n < \varepsilon \cdot x_n)$ de donde obtenemos

$(\forall\, n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow Y - Y_n < \varepsilon \cdot (X - X_n))$, luego $\lim_{n\to\infty} \frac{Y - Y_n}{X - X_n} = 0$.

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge más rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

En el caso $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$ el razonamiento es similar. □

Proposición 6

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ son divergentes y verifican $x_n \neq 0 (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ (respectivamente, $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge menos (respectivamente, más) rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Demostración:

Vamos a probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ implica $\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{X_n} = 0$. Para ello, consideremos el conjunto

$$A = \{(n,k) : (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant k\}$$

y sea $f \in \mathscr{F}(A; \mathbb{R})$ la aplicación definida así:

$$f(n,k) = \frac{x_k}{X_n} \qquad (\forall\, (n,k) \in A)$$

El "esquema" asociado a dicha aplicación es

$$\frac{x_1}{X_1}$$

$$\frac{x_1}{X_2} \quad \frac{x_2}{X_2}$$

$$\frac{x_1}{X_3} \quad \frac{x_2}{X_3} \quad \frac{x_3}{X_3}$$

- - - - - - -

$$\frac{x_1}{X_n} \quad \frac{x_2}{X_n} \quad \frac{x_3}{X_n} \quad - - - - - - - \quad \frac{x_n}{X_n}$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

Veamos que verifica las hipótesis del teorema de Toeplitz:

a) para cada $k \in \mathbb{N}^*$ resulta $\lim_{n \to \infty} \frac{x_k}{X_n} = 0$ ya que $\lim_{n \to \infty} X_n = +\infty$.

b) la sucesión cuyos elementos son las sumas de los valores absolutos de las filas es $\{1\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, ya que

$$\frac{x_1}{X_n} + \frac{x_2}{X_n} + \ldots + \frac{x_n}{X_n} = 1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

y, por tanto, está acotada.

c) la sucesión cuyos elementos son las sumas de las filas coincide con la del apartado b); por tanto, es convergente y su límite vale 1.

Considerando $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y teniendo presente que $\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, del teorema de Toeplitz deducimos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X_n} \cdot \frac{y_k}{x_k} = 0, \text{ es decir } \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{X_n} = 0$$

lo que implica $\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{X_n} = 0$ y, por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge menos rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

En el caso $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$ el razonamiento es similar.

□

Finalizaremos el presente parágrafo demostrando que dada una serie convergente de términos estrictamente positivos, entonces existe otra serie de términos estrictamente positivos que converge menos rápidamente. Una consideración análoga vale en el caso de una serie divergente de términos estrictamente positivos.

Proposición 7

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R})$ converge y $x_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$, entonces existe una serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R})$ que converge menos rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R})$ diverge y $x_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$, entonces existe una serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R})$ que diverge menos rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Demostración:

a) Notemos X la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y definamos

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt{X-X_{n-1}} + \sqrt{X-X_n}} = \sqrt{X-X_{n-1}} - \sqrt{X-X_n} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \quad (X_o = 0).$$

Del corolario de la proposición 6 del parágrafo anterior deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente y su suma es $\sqrt{X}$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{X-X_{n-1}} + \sqrt{X-X_n}} = +\infty .$$

concluimos, de la proposición 6 de este parágrafo, que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge menos rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

b) En este caso definimos

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt{X_n} + \sqrt{X_{n-1}}} = \sqrt{X_n} - \sqrt{X_{n-1}} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \quad (X_o = 0),$$

teniendo presente que $Y_n = \sqrt{X_1} - \sqrt{X_n} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$

y $\lim_{n \to \infty} \sqrt{X_n} = +\infty$ concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente.

Finalmente, puesto que $\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{X_n} + \sqrt{X_{n-1}}} = 0$ deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge menos rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

□

§ 4: SERIES ALTERNADAS

Definición:

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es alternada sí y sólo sí verifica la condición:

$$[x_n=(-1)^n.\ |x_n| \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)] \vee [x_n=(-1)^{n+1}.|x_n| \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)] .$$

La descripción de los términos de una serie alternada es la siguiente, según el caso:

(α): $-|x_1|,\ |x_2|,\ -|x_3|,\ |x_4|,\ -|x_5|,\ldots,\ (-1)^n.|x_n|,\ldots$

(β): $|x_1|,-|x_2|,|x_3|,\ -|x_4|,\ |x_5|,\ldots,\ (-1)^{n+1}.|x_n|,\ldots$

Puesto que el término n-ésimo de la serie alternada (α) se deduce del término n-ésimo de (β) multiplicando por -1, resultará que el estudio del carácter de las series alternadas de tipo (α) se reduce al estudio de las del tipo (β).

El nombre de "alternada" proviene del hecho de que en dicha serie, dos términos consecutivos cualesquiera poseen siempre distinto signo, conviniendo para ello que los términos nulos pueden considerarse, indistintamente, positivos o negativos. Ahora bien, téngase presente que la condición de que dos términos consecutivos cualesquiera de una serie tengan distinto signo, no caracterizan las series alternadas; por ejemplo, la serie

$$1+0+0+1-1+1-1+1-1+\ \ldots$$

no es alternada y, en cambio, verifica la citada condición.No obstante, mediante la supresión de un número conveniente de ceros podemos obtener una serie alternada, a partir de la serie original, cuyo carácter coincidirá, obviamente, con el de dicha serie.

Proposición 1

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $x_n=(-1)^{n+1}.|x_n|$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y la sucesión $\{|x_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente. En tal situación, la sucesión $\{X_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es creciente y la sucesión $\{X_{2k-1}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente.

Demostración:

Puesto que $x_n=(-1)^{n+1}.|x_n|$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, para cada $k \in \mathbb{N}^*$ se verificará.

$$X_{2(k+1)}-X_{2k}=(-1)^{2k+3}.|x_{2k+2}|+(-1)^{2k+2}.|x_{2k+1}|=-|x_{2k+2}|+|x_{2k+1}| \geqslant 0$$

$$X_{2(k+1)-1}-X_{2k-1}=(-1)^{2k+2}.|x_{2k+1}|+(-1)^{2k+1}|x_{2k}|=|x_{2k+1}|-|x_{2k}| \leqslant 0$$

□

Proposición 2

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $x_n=(-1)^{n+1}.|x_n|$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ y la sucesión $\{|x_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente. En tal situación, para cada $k \in \mathbb{N}^*$ y $p \in \mathbb{N}^*$ resulta $X_{2k} \leqslant X_{2p-1}$ (con otras palabras, en las hipótesis de la proposición, cualquier término de la sucesión $\{X_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es menor o igual que cualquier término de la sucesión $\{X_{2k-1}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$).

Demostración:

Distingamos tres casos:

Caso 1: $k=p$.

En tal situación resulta, para cada $k \in \mathbb{N}^*$

$$X_{2k}-X_{2k-1} = (-1)^{2k+1}.|x_{2k}| = -|x_{2k}| \leqslant 0$$

Caso 2: $k > p$.

En este caso tendremos, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $k > p$

$$X_{2k}-X_{2p-1}=(-1)^{2p+1}|x_{2p}|+(-1)^{2p+2}|x_{2p+1}|+\ldots+(-1)^{2k-1}.|x_{2k-2}|+$$

$$+(-1)^{2k}|x_{2k-1}|+(-1)^{2k+1}.|x_{2k}|=\left[-|x_{2p}|+|x_{2p+1}|\right]+\ldots+\left[-|x_{2k-2}|+\right.$$

$$\left.+|x_{2k-1}|\right]-|x_{2k}| \leqslant 0$$

Caso 3: $k < p$.

En este caso, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $k < p$, se verificará

$$X_{2p-1}-X_{2k}=(-1)^{2k+2}.|x_{2k+1}|+(-1)^{2k+3}|x_{2k+2}|+\ldots+(-1)^{2p-2}|x_{2p-3}|+$$

$$+(-1)^{2p-1}|x_{2p-2}|+(-1)^{2p}.|x_{2p-1}| = \left[|x_{2k+1}|-|x_{2k+2}|\right]+\ldots+$$

$$+\left[|x_{2p-3}|-|x_{2p-2}|\right]+|x_{2p-1}| \geqslant 0$$

□

Corolario

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{A}(\mathbb{R})$ tal que $x_n=(-1)^{n+1}.|x_n|$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y la sucesión $\{|x_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente. En tal situación, las sucesiones $\{X_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ y $\{X_{2k-1}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ son convergentes.

En efecto: basta tener presente que dichas sucesiones son monótonas (proposición 1) y acotadas (proposición 2).

□

Teorema de Leibniz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathscr{A}(\mathbb{R})$ tal que $x_n=(-1)^{n+1}.|x_n|$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y la sucesión $\{|x_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente. En tal situación: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente sí y sólo sí la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a cero.

Demostración:

Ya probamos que la condición $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ es necesaria y no suficiente para laconvergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Veamos que, en las hipótesis del teorema de Leibniz,dicha condición es suficiente. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}^*$ se verifica

$$X_{2k} - X_{2k-1} = x_{2k}$$

y teniendo presente que $\lim_{k\to\infty} x_{2k}=0$ deducimos $\lim_{k\to\infty}(X_{2k}-X_{2k-1})=0$, y puesto que las sucesiones $\{X_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ $\{X_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ son convergentes resultará

$$\lim_{k\to\infty} X_{2k} = \lim_{k\to\infty} X_{2k-1} = X.$$

Luego, para cada $\varepsilon\in\mathbb{R}^+ - \{0\}$ existirán $k_o \in \mathbb{N}^*$, $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall k)(k\in\mathbb{N}^* \wedge k \geq k_o \Rightarrow |X_{2k}-X|<\varepsilon) \wedge (\forall k)(k\in \mathbb{N}^* \; k \geq k_1 \Rightarrow |X_{2k-1}-X| < \varepsilon)$$

por tanto, si notamos $n_o=\text{máx}\{2k_o, 2k_1\}$ obtendremos finalmente

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow |X_n - X| < \varepsilon)$$

Es decir $\lim_{n\to\infty} X_n=X$; luego la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

□

Corolario

En las hipótesis del teorema de Leibniz, y con la misma nomenclatura, se verifica

$$|X-X_n| < |x_{n+1}| \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(es decir, el valor absoluto del error cometido al aproximar la suma de la serie X por X_n está mayorada por el valor absoluto del primer término despreciado).

En efecto: puesto que, para cada $k\in\mathbb{N}^*$ se verifica $X_{2k} < X < X_{2k+1}$

resultará, para cada $k \in N^*$

$$|X - X_{2k}| = X - X_{2k} \leq X_{2k+1} - X_{2k} = (-1)^{2k+2} \cdot |x_{2k+1}| = |x_{2k+1}|$$

$$|X_{2k-1} - X| = X_{2k-1} - X \leq X_{2k-1} - X_{2k} = -(-1)^{2k+1} \cdot |x_{2k}| = |x_{2k}|$$

§ 5: SERIES DE NÚMEROS REALES DE TÉRMINOS ARBITRARIOS.

Nos proponemos en el presente parágrafo estudiar el carácter (relativo a la convergencia o divergencia) de una seria arbitraria de números reales, para lo cual introduciremos nuevos tipos de convergencia de series (convergencia absoluta, condicional, conmutativa o incondicional) que relacionaremos con la convergencia que, en adelante, y para diferenciarla de las anteriores, llamaremos "ordinaria", a la vez que obtendremos condiciones suficientes para poder garantizar las distintas convergencias en una determinada serie. Concluiremos el parágrafo analizando la incidencia de dichas convergencias en los distintos productos de series introducidos obteniendo, asímismo, condiciones suficientes para la convergencia ordinaria y absoluta de dichos productos.

Definición:

Diremos que una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es absolutamente convergente sí y sólo sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente.

De esta definición resulta inmediatamente que para series de términos positivos (y, por tanto, también para series de términos negativos) la convergencia absoluta coincide con la convergencia ordinaria ya que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}^+(\mathbb{R})$ entonces $x_n = |x_n| \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.

Existen series de números reales convergentes que no son absolutamente convergentes. En efecto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es alternada verificando que la sucesión $\left\{ \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente y convergente a cero, luego del teorema de Leibniz deducimos la convergencia ordinaria de dicha serie, no obstante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ no es absolutamente convergente ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|$ es, precisamente, la serie armónica cuya divergencia ya probamos.

Definición:

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es condicionalmente convergente

sí y sólo sí $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente pero no es absolutamente convergente. De la observación anterior resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es condicionalmente convergente.

Proposición 1

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente. Además, en tal situación se verifica $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ notemos R_n y R_n^* las series restos n-ésimos de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, respectivamente; sean $\{R_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ y $\{R^*_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ las correspondientes sucesiones de sumas parciales de $\{x_{n+k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ y $\{|x_{n+k}|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente, luego para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_o$: $|R^*_{n,k}| = R^*_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} |x_{n+j}| < \varepsilon$.

Ahora bien, teniendo presente que para $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$|R_{n,k}| = |\sum_{j=1}^{k} x_{n+j}| \leq \sum_{j=1}^{k} |x_{n+j}| = R^*_{n,k}$$

resulta

$$(\forall n)\ (\forall k)\ (k \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow |R_{n,k}| < \varepsilon)$$

y, por tanto, de la caracterización de Cauchy para la convergencia de una serie, concluimos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Si notamos $\{X^*_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ obtendremos, para cada $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|X_n| = |\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| = X^*_n$$

de donde deducimos

$$|\lim_{n\to\infty} X_n| = \lim_{n\to\infty} |X_n| \leq \lim_{n\to\infty} X^*_n$$

es decir $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ (desigualdad que puede interpretarse como una extensión formal de la desigualdad triangular del valor absoluto, al caso de un número infinito numerable de sumandos convenientes).

□

La existencia de series de números reales condicionalmente convergente nos permite asegurar que el recíproco de la proposición anterior es falso.

A continuación pretendemos reducir, en cierto sentido, el estudio de la convergencia absoluta de una serie de números reales a la convergencia de una serie de términos positivos (o de términos negativos), para lo cual asociaremos a cada serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ una de términos positivos y otra de términos negativos, tales que la serie suma de éstas nos proporcione la serie inicial $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Definición:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ entonces notaremos

$$x_n^+ = x_n \quad \text{si} \quad x_n \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad x_n^+ = 0 \quad \text{si} \quad x_n \in \mathbb{R}^-$$

$$x_n^- = x_n \quad \text{si} \quad x_n \in \mathbb{R}^- \quad \text{y} \quad x_n^- = 0 \quad \text{si} \quad x_n \in \mathbb{R}^+$$

y diremos que las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \in \mathcal{S}^-(\mathbb{R})$ son, respectivamente, las series de términos positivos y de términos negativos asociadas a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Puesto que de la anterior definición resulta inmediatamente

$$x_n = x_n^+ + x_n^- \quad \text{y} \quad |x_n| = x_n^+ - x_n^- \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

deducimos las relaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$$

(igualdades que han de ser interpretadas en el grupo conmutativo $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +)$). Veremos, a continuación, que en el caso de una serie ab-

solutamente convergente puede también interpretarse dicha igualdad en $(\mathbb{R},+)$, es decir, entre las correspondientes sumas de dichas series convergentes.

Proposición 2

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ($\in \mathbb{R}$) es absolutamente convergente sí y sólo si son convergentes las series de términos positivos y de términos negativos asociada a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Además, en tal situación se verifica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$$

(igualdades que han de ser interpretadas en el grupo conmutativo $(\mathbb{R}, +)$).

Demostración:

Si notamos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{X_n^+\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{X_n^-\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ las respectivas sucesiones de sumas parciales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{x_n^+\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{x_n^-\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y teniendo presente que $x_n = x_n^+ + x_n^-$ y $|x_n| = x_n^+ - x_n^-$ $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)$ deducimos, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, las relaciones

$$X_n = X_n^+ + X_n^- \quad \text{y} \quad X_n^* = X_n^+ - X_n^-$$

de donde resulta

$$X_n^+ = \frac{X_n + X_n^*}{2} \quad \text{y} \quad X_n^- = \frac{X_n - X_n^*}{2} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente. Sean X y X^* las respectivas sumas de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$; se verificará

$$\lim_{n\to\infty} X_n^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n + X_n^*}{2} = \frac{X+X^*}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n^- = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n - X_n^*}{2} = \frac{X - X^*}{2}$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = X^* = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \ .$$

Recíprocamente, si las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ son convergentes (lo que en dichas series equivale a la convergencia absoluta) y notamos X^+, X^- las respectivas sumas, entonces resultará

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} X_n^+ + \lim_{n\to\infty} X_n^- = X^+ + X^-$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n^* = \lim_{n\to\infty} X_n^+ - \lim_{n\to\infty} X_n^- = X^+ - X^-$$

, por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente y, además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X^+ + X^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = X^+ - X^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \ .$$

□

Corolario

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es condicionalmente convergente, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ son divergentes.

En efecto: si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ fuese no divergente sería convergente (por ser de términos positivos), con lo cual de la relación $X_n^+ = \frac{X_n + X_n^*}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ deduciríamos que la sucesión $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente, de donde resultaría la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$: lo que contradice la convergencia condicional de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ es divergente.

A la misma conclusión se llega, mediante análogo razonamiento, con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$.

□

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ es una aplicación estrictamente creciente (respecto de la ordenación usual de $\mathbb{N}^*$), entonces diremos que $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ es una serie parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Las series parciales juegan en la teoría de series un papel análogo al de las sucesiones parciales en la teoría de sucesiones, no obstante, en contra de lo que pudiera pensarse, no pueden extenderse formalmente a las series parciales todas las propiedades de las sucesiones parciales de una determinada sucesión. Así por ejemplo, sabemos que toda sucesión parcial de una sucesión convergente es, asímismo, convergente y, además, su límite coincide con el límite de la sucesión de partida; en cambio, una serie de números reales convergente puede poseer series parciales no convergentes. En efecto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es condicionalmente convergente, sea $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ definida por $\varphi(k)=2k-1 \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$; la serie parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ asociada a φ es la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ que es divergente ya que basta tener presente que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{2k-1}}{k} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y aplicar el criterio de comparación generalizada.

Otras propiedades, en cambio, válidas para sucesiones parciales son, asímismo, válidas para series parciales; por ejemplo, sabemos que una sucesión no convergente puede admitir sucesiones parciales convergentes, con las series parciales ocurre otro tanto. En efecto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente y si consideramos la aplicación $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ definida por $\varphi(k)= k^2 \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$ resulta que la serie parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ asociada a φ es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ que, trivialmente, es convergente.

Es interesante observar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ no son, propiamente, series parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$; ahora bien, de la proposición 8 (§ 2) del presente capítulo (pág. 497) y a efectos del carácter de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ podemos, efectivamente, considerar a las series de términos positivos y de términos negativos de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ como series

parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Finalmente, téngase en cuenta que toda serie es serie parcial de ella misma, ya que $I_{\mathbb{N}^*} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ es una aplicación estrictamente creciente.

Antes hemos probado con un ejemplo conveniente que la convergencia de una serie no implica la convergencia de todas sus series parciales; a continuación vamos a establecer una condición suficiente para la convergencia de todas las series parciales de una serie de números reales, que nos proporcionará una nueva caracterización de la convergencia absoluta.

Proposición 3

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ es absolutamente convergente sí y sólo sí toda serie parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

Demostración:

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente, notemos por $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y por X^* la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$; sea $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ una aplicación estrictamente creciente y consideremos la serie parcial $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}$. En tal situación, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\varphi(n)} |x_k| = X^*_{\varphi(n)} \leq X^*$$

de donde resulta que la sucesión de sumas parciales de $\{|x_{\varphi(k)}|\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente, por tanto, la serie parcial $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}$ es absolutamente convergente.

Recíprocamente, si toda serie parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente entonces, en particular, lo serán las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$, luego de la proposición 2 deducimos la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

□

De aquí resulta que no puede existir una serie de números reales tal que todas sus series parciales sean condicionalmente convergentes, ya que en tal caso, las series de términos positivos y negativos asociada serían condicionalmente convergente y, por tanto, convergente, lo cual implicaría la convergencia absoluta de la serie y, de la proposición anterior, concluiríamos que todas las series parciales son absolutamente convergentes: lo que es una contradicción.

Reordenación de una serie de números reales.

Definición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ es una aplicación biyectiva, entonces diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{h(k)}$ es una reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Intuitivamente, considerar una serie reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ consiste en "distribuir" los términos de dicha serie mediante un determinado criterio, fijado por la aplicación biyectiva

Definición:

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es conmutativamente (o incondicionalmente) convergente sí y sólo sí toda serie reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

Téngase presente que los conceptos de convergencia no condicional y convergencia incondicional no son equivalentes (de ahí que prefiera utilizar la nomenclatura de convergencia conmutativa), ya que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ no es convergente entonces no será ni condicional ni incondicionalmente convergente, baste observar que toda serie es reordenada de sí misma.

Proposición 4

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es absolutamente convergente entonces toda serie reordenada $\sum_{k=1}^{\infty} x_{h(k)}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente y, ade-

más, la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ coincide con la suma de la reordenada $\sum_{k=1}^{\infty} x_{h(k)}$.

Demostración:

Sea $h \in \mathcal{J}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ una aplicación biyectiva y notemos, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \max\{h(1), \ldots, h(n)\}$. En tal situación se verifica

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{h(k)}| \leq \sum_{k=1}^{a_n} |x_k| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

y, por tanto, la sucesión de sumas parciales de $\{|x_{h(k)}|\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ está acotada superiormente, luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{h(k)}$ es absolutamente convergente.

Si notamos $y_k = x_{h(k)}$ $(\forall\, k \in \mathbb{N}^*)$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$, teniendo presente que las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ son absolutamente convergentes, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ existirán $n_o \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$(\forall n)\ (\forall k)\ (k \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_o \Rightarrow |x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+k}| < \tfrac{\varepsilon}{4})$$

$$(\forall n)\ (\forall k)\ (k \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_1 \Rightarrow |y_{n+1}| + \ldots + |y_{n+k}| < \tfrac{\varepsilon}{4}).$$

Si $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2$ se verifica

$$|X_{n+k} - X_n| \leq |x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|Y_{n+k} - Y_n| \leq |y_{n+1}| + \ldots + |y_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

y puesto que

$$\lim_{k \to \infty} X_{n+k} = X \quad \text{y} \quad \lim_{k \to \infty} Y_{n+k} = Y$$

resultará

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq n_2 \Rightarrow |X - X_n| \leq \tfrac{\varepsilon}{4} \wedge |Y - Y_n| \leq \tfrac{\varepsilon}{4})$$

Notemos $n_3=\max\{h^{-1}(1),\ldots,h^{-1}(n_2)\}$, $n_4=\max\{h^{-1}(1),\ldots,h^{-1}(n_2)\}$, $n_5=\max\{n_3,n_4\}$. Si $n\in\mathbb{N}^*$ es tal que $n\geqslant n_5$, entonces en la suma parcial X_n aparecerán como sumandos los términos $x_{h(1)},\ldots,x_{h(n_2)}$ (es decir $y_1,\ldots,y_{n_2}$) , y en la suma parcial Y_n aparecerán como sumandos los términos $y_{h^{-1}(1)},\ldots,y_{h^{-1}(n_2)}$ (es decir $x_1,\ldots,x_{n_2}$). Por tanto, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant n_5$ se verifica

$$|X_n-Y_n|\leqslant |x_{n_2+1}|+\ldots+|x_n|+|y_{n_2+1}|+\ldots+|y_n|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

de donde deducimos

$$|X-Y|\leqslant |X-X_{n_5}|+|X_{n_5}-Y_{n_5}|+|Y_{n_5}-Y|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

y, por tanto, $|X-Y|=0$, es decir $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=X=Y=\sum_{k=1}^{\infty}x_{h(k)}$.

□

Acabamos, pues, de demostrar que si una serie de números reales es absolutamente convergente, entonces toda reordenada de dicha serie es absolutamente convergente y, además, su suma coincide con la suma de la serie de partida (en particular, la convergencia absoluta implica la convergencia incondicional o conmutativa). Por tanto, en una serie absolutamente convergente no se altera el carácter ni la suma al efectuar reordenaciones; más adelante demostraremos que esta condición no sólo es necesaria sino, también, suficiente para la convergencia absoluta de una serie de números reales, lo que deduciremos como consecuencia de un teorema muy importante (debido a Riemann), relativo a series condicionalmente convergentes.

Teorema de reordenación de Riemann.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ una serie condicionalmente convergente y λ,μ números reales tales que $\lambda\leqslant\mu$. En tal situación, existe una serie reordenada $\sum_{k=1}^{\infty}x_{h(k)}$ de $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ tal que

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\,X_{h(k)}=\lambda \quad\text{y}\quad \overline{\lim}_{k\to\infty}\,X_{h(k)}=\mu$$

donde $\{X_{h(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ representa la sucesión de sumas parciales de $\{x_{h(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Demostración:

En primer lugar, téngase presente que al ser $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ condicionalmente convergente del corolario de la proposición 2 deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ son divergentes (lo que implica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = -\infty$).

A continuación pretendemos considerar por una parte los términos positivos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, en el mismo orden que aparecen en ésta; y por otra , los términos estrictamente negativos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, en el mismo orden que aparecen en ésta. Así construiremos dos series de números reales que difieren de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$, respectivamente, en términos que son iguales a cero; por tanto, las tales series serán convergentes a $+\infty$ y a $-\infty$, respectivamente.

Para considerar dichas series notemos

$$A^+ = \{k: k\in\mathbb{N}^* \wedge x_k \geq 0\} \quad , \quad A^- = \{k: k\in\mathbb{N}^* \wedge x_k < 0\} \ .$$

Los conjuntos A^+ y A^- son infinitos ya que, de lo contrario, si A^+ fuese finito, prescindiendo de los términos positivos de la serie (lo que es factible a efectos de su carácter) resultaría que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es de términos estrictamente negativos que, trivialmente, no puede ser condicionalmente convergente (si A^- fuese finito se llega a una contradicción mediante un razonamiento similar). Sea $n_1 = \text{mín } A^+$ y consideremos la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}^* - \{1\}, <)$ en $\mathbb{N}^*$ definida así: para cada $\alpha \in \mathcal{F}(S(n); \mathbb{N}^*)$ $(n\in\mathbb{N}^* - \{1\})$

$$H(\alpha) = \text{mín}\,[A^+ - \alpha(S(n))]$$

(obsérvese que para cada $n\in\mathbb{N}^* - \{1\}$ se verifica $A^+ - \alpha(S(n)) \neq \emptyset$, ya que A^+ es un conjunto infinito).

Del corolario del teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita (cap. II; § 5; pág. 149) deducimos la exis-

tencia de una única aplicación $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ verificando

a) $f(1) = n_1$

b) $(\forall k)\left(k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(k+1) = H(f|_{S_{(k+1)}}) = \min\,[A^+ - \{f(1), \ldots, f(k)\}]\right)$

de donde resulta inmediatamente que f es estrictamente creciente. Si notamos $f(k) = n_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ es la serie parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cuyos términos son precisamente los términos positivos de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y en el mismo orden que aparecen en ésta.

Mediante un proceso análogo, considerando A^- en lugar de A^+, se obtiene la serie parcial, que notaremos $\sum_{k=1}^{\infty} x_{p_k}$, cuyos términos son los estrictamente negativos de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y, además, en el mismo orden que aparecen en ésta. Por comodidad de notación escribiremos

$$a_k = x_{n_k} \quad y \quad b_k = x_{p_k} \qquad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$$

De consideraciones anteriores resulta que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = -\infty$.

Si para cada $n \in \mathbb{N}^*$ consideramos $\lambda_n = \lambda - \frac{1}{n}$ y $\mu_n = \mu + \frac{1}{n}$, entonces resulta $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ y $\lambda_n < \mu_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Por otra parte, notemos para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$C_t^+ = \{k: \ k \in \mathbb{N}^* \wedge A_k > t\} \quad y \quad C_t^- = \{k: k \in \mathbb{N}^* \wedge B_k < t\},$$

donde $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ y $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ representan las sucesiones de sumas parciales de $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, respectivamente. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = -\infty$ resulta

$$C_t^+ \neq \emptyset \quad y \quad C_t^- \neq \emptyset \qquad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

A continuación pretendemos considerar:

α_1 el menor número natural tal que $A_{\alpha_1} > \mu_1$

α_2 el menor número natural tal que $A_{\alpha_1} + B_{\alpha_2} < \lambda_1$

α_3 el menor número natural tal que $A_{\alpha_3} + B_{\alpha_2} > \mu_2$

α_4 el menor número natural tal que $A_{\alpha_3} + B_{\alpha_4} < \lambda_2$

y reiterar recurrentemente este proceso,para lo cual aplicaremos convenientemente el teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita.

Sea $\alpha_1 = \min \mathcal{C}^+_{\mu_1}$ y consideremos la función de recurrencia H' del tipo $(\mathbb{N}^* - \{1\}, \leqslant)$ en $\mathbb{N}^*$ definida así, para cada $\beta \in \mathcal{F}(S(n); \mathbb{N}^*)$ $(n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$:

$$H'(\beta) = \begin{cases} \min \mathcal{C}^-_{\lambda_{k-A}} \beta(2k-1) & (\text{si } n=2k;\ k \in \mathbb{N}^*) \\ \min \mathcal{C}^+_{\mu_{k-B}} \beta(2k-2) & (\text{si } n=2k-1;\ k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Del corolario de dicho teorema (cap. II; § 5, pág. 149) deducimos la existencia de una única aplicación $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \mathbb{N}^*)$ verificando

a) $g(1) = \alpha_1$

b) $(\forall n)\left(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow g(n+1) = H'(g_{S(n+1)}) = \begin{cases} \min \mathcal{C}^-_{\lambda_{k-A}} g(2k-1) & (\text{si } n+1=2k;\ k \in \mathbb{N}^*) \\ \min \mathcal{C}^+_{\mu_{k-B}} g(2k-2) & (\text{si } n+1=2k-1;\ k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}\right)$

Luego si notamos $g(n) = \alpha_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ resultará:

$\alpha_n = \min \mathcal{C}^-_{\lambda_{k-A}} \alpha_{2k-1}$ (si $n=2k$; $k \in \mathbb{N}^*$)

$\alpha_n = \min \mathcal{C}^+_{\mu_{k-B}} \alpha_{2k-2}$ (si $n=2k-1$; $k \in \mathbb{N}^*$; considerando $B_o=0$).

Con otras palabras, se verifican las relaciones:

$$A_{\alpha_1} > \mu_1 \quad y \quad A_{\alpha_1-1} \leqslant \mu_1 \quad \text{(notando } A_o = \mu_1\text{)}$$

(1)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{para cada } k \in \mathbb{N}^* \\ \\ B_{\alpha_{2k}} < \lambda_k - A_{\alpha_{2k-1}} \quad y \quad B_{\alpha_{2k}-1} \geqslant \lambda_k - A_{\alpha_{2k-1}} \\ \\ \text{y si } k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \\ \\ A_{\alpha_{2k-1}} > \mu_k - B_{\alpha_{2k-2}} \quad y \quad A_{\alpha_{2k-1}-1} \leqslant \mu_k - B_{\alpha_{2k-2}} \end{array}\right.$$

De la condición $\lambda_n < \mu_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ resulta que las sucesiones $\{\alpha_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ y $\{\alpha_{2k-1}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ son estrictamente crecientes.

A continuación pretendemos considerar la reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cuya "representación" es

$$x_{n_1}+\ldots+x_{n_{\alpha_1}}+x_{p_1}+\ldots+x_{p_{\alpha_2}}+x_{n_{\alpha_1+1}}+\ldots+x_{n_{\alpha_3}}+x_{p_{\alpha_2+1}}+\ldots$$

$$+x_{p_{\alpha_4}}+x_{n_{\alpha_3+1}}+\ldots+x_{n_{\alpha_5}}+\ldots \quad \text{o equivalentemente:}$$

$$a_1+\ldots+a_{\alpha_1}+b_1+\ldots+b_{\alpha_2}+a_{\alpha_1+1}+\ldots+a_{\alpha_3}+b_{\alpha_2+1}+\ldots+b_{\alpha_4}+$$

$$+a_{\alpha_3+1}+\ldots+a_{\alpha_5}+\ldots$$

Dicha serie es, precisamente, la reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ asociada a la aplicación biyectiva $h \in (\mathbb{N}^*;\mathbb{N}^*)$ definida así:

a) si $j \in [1, \alpha_1]$ entonces $h(j)=n_j$.

b) si $j \in]\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2]$ y $j=\alpha_1+r$ entonces $h(j)=p_r$

c) si $k \in \mathbb{N}^*$, $j \in]\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}, \alpha_{2k}+\alpha_{2k+1}]$ y $j=\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}+r$

entonces $h(j)=n_{\alpha_{2k-1}+r}$.

d) si $k \in \mathbb{N}^*$, $j \in]\alpha_{2k}+\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+1}+\alpha_{2k+2}]$ y $j=\alpha_{2k}+\alpha_{2k+1}+r$

entonces $h(j)= p_{\alpha_{2k}+r}$.

Notemos por $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la tal reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y por $\{ C_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ que, por definición, verificará

$$C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k-2}} = A_{\alpha_{2k-1}} + B_{\alpha_{2k-2}} \quad \text{(para cada } k \in \mathbb{N}^* \text{ y considerando } B_o=0=\alpha_{\ell}$$

$$C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}} = B_{\alpha_{2k}} + A_{\alpha_{2k-1}} \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N}^*)$$

luego las relaciones expresadas en (1) podemos escribirlas así

$$\left.\begin{array}{l} C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k-2}} > \mu_k \\ C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}} < \lambda_k \end{array}\right\} \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N}^*)$$

Además para cada $k \in \mathbb{N}^*$ se verificará

$$C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k-2}} - \mu_k = A_{\alpha_{2k-1}} + B_{\alpha_{2k-2}} - \mu_k = a_{\alpha_{2k-1}} + A_{\alpha_{2k-1}} - 1 + B_{\alpha_{2k-2}} - \mu_k$$

$$\leqslant a_{\alpha_{2k-1}} + B_{\alpha_{2k-2}} - B_{\alpha_{2k-2}} = a_{\alpha_{2k-1}} = x_{n_{\alpha_{2k-1}}}$$

$$\lambda_k - C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}} = \lambda_k - B_{\alpha_{2k}} - A_{\alpha_{2k-1}} = \lambda_k - b_{\alpha_{2k}} - B_{\alpha_{2k-1}} - A_{\alpha_{2k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_k - b_{\alpha_{2k}} - (\lambda_k - A_{\alpha_{2k-1}}) - A_{\alpha_{2k-1}} = -b_{\alpha_{2k}} = |x_{n_{\alpha_{2k}}}| \ ;$$

es decir, resulta para cada $k \in \mathbb{N}^*$

$$|C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k-2}} - \mu_k| \leqslant x_{n_{\alpha_{2k-1}}}$$

$$|\lambda_k - C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}| \leqslant |x_{n_{\alpha_{2k}}}|$$

y teniendo presente que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ deducimos de las relaciones anteriores

$$\lim_{k\to\infty} C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k-2}} = \mu \text{ y } \lim_{k\to\infty} C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}} = \lambda ,$$

por tanto λ y μ son valores de adherencia de la sucesión de sumas parciales $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ahora bien, puesto que dado $k_o \in \mathbb{N}^*$ todo elemento de la sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (salvo a lo sumo un número finito de términos) está comprendido o bien entre $C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}$ y $C_{\alpha_{2k}+\alpha_{2k+1}}$, o bien entre $C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}$ y $C_{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k-2}}$ (para algún $k \geq k_o$), resulta que si $\mu' > \mu$ y $\lambda' < \lambda$ entonces no pueden existir sucesiones parciales de $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergentes a μ' o λ'. Conclusión: $\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} C_n$ y $\lambda = \underline{\lim_{n\to\infty}} C_n$; lo que completa la demostración del teorema de reordenación de Riemann.

□

Corolario 1

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es condicionalmente convergente y $A \in \mathbb{R}$, entonces existe una serie reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente y cuya suma es igual a A.

En efecto: basta aplicar el teorema de reordenación de Riemann considerando $\lambda = \mu = A \in \mathbb{R}$.

□

Corolario 2

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es condicionalmente convergente, entonces existen dos series reordenadas de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergentes y cuyas sumas son, respectivamente, $+\infty$ y $-\infty$. En efecto: para demostrar la existencia de una reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergente y de suma $+\infty$ basta considerar $\lambda_n = n$, $\mu_n = n+1$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ y aplicar un proceso similar al de la demostración del teorema; para obtener una serie divergente de suma $-\infty$ se considera $\lambda_n = -n$ y $\mu_n = -n+1$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$.

□

Corolario 3 (Teorema de Dirichlet)

Una serie de números reales es absolutamente convergente sí y sólo sí es conmutativamente convergente.

En efecto: de la proposición 4 deducimos que toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente. Recíprocamente, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ no es absolutamente convergente. En tal situación, o bien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es convergente (en cuyo caso $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es conmutativamente convergente), o bien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente (en cuyo caso sería condicionalmente convergente) y del teorema de reordenación de Riemann concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es conmutativamente convergente (basta aplicar el teorema al caso $\lambda < \mu$).

□

Convergencia de series productos.

Finalizaremos el presente capítulo, estableciendo condiciones suficientes para la convergencia del primer producto interior y producto ordinario de series de números reales.

Proposición 5 (Fórmula de sumación parcial de Abel)

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{R})$ entonces se verifica:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X_n \cdot y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (y_{k+1} - y_k) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata de la proposición 4 (§ 1) del presente capítulo (pág. 479).

□

Proposición 6 (Criterio de Dirichlet)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ verifican:

a) la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada.

b) la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es monótona.

c) la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a cero.

, entonces la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$ (es decir $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$) es convergente.

Demostración:

Sea $M \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |X_n| \leq M)$. En tal situación resulta

$$|X_k(y_{k+1}-y_k)| \leq M.|y_{k+1}-y_k| \qquad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$$

Ahora bien, si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es creciente se verificará

$$(\forall k)\ (k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |y_{k+1}-y_k| = y_{k+1}-y_k)$$

y si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente resultará

$$(\forall k)\ (k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |y_{k+1}-y_k| = y_k - y_{k+1}).$$

En consecuencia, puesto que $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$, de la proposición 6 (§ 2) y de su corolario deducimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1}-y_k|$ es convergente.

Por otra parte, de la relación (1) y del criterio de comparación deducimos que $\sum_{k=1}^{\infty} X_k(y_{k+1}-y_k)$ es absolutamente convergente y teniendo presente que $\lim_{n \to \infty} X_n \cdot y_{n+1} = 0$ (pues $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada y $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$) concluimos que la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente y, por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ es convergente.

□

Corolario (Criterio de Abel).

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ verifican:

a) la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente.

b) la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es monótona.

c) la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente.

, entonces la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$ (es decir $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$) es convergente.

En efecto : puesto que la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es monótona convergente, si notamos por y su límite resultará que la sucesión $\{y_n - y\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es monótona y convergente a cero. Teniendo presente que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada por ser convergente, del criterio de Dirichlet deducimos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot (y_n - y)$. Finalmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} y \cdot x_n$ es convergente; luego concluimos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$, es decir de $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$.

□

Es interesante observar que del criterio de Dirichlet resulta inmediatamente el teorema de Leibniz para series alternadas: en efecto, si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot |x_n|$ verifica que $\{|x_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión decreciente convergente a cero, entonces teniendo presente que la sucesión de sumas parciales de $\{(-1)^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está, trivialmente, acotada deducimos del criterio de Dirchlet la convergencia de la serie alternada $\sum_{n-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot |x_n|$.

Proposición 7 (Criterio de du Bois-Raymond).

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ verifican:

a) la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente .

b) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k+1})$ es absolutamente convergente .

, entonces la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$ (es decir $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$) es convergente.

Demostración:

Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k+1})$ es absolutamente convergente y para cada $n \in \mathbb{N}^*$ resulta $\sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1}) = y_1 - y_{n+1}$, deducimos la convergencia de la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y, por tanto, de $\{X_n y_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Sea $M \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $|X_n| \leqslant M \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$. Se verifica

$$|X_k\ (y_{k+1}-y_k)| \leqslant M.|\ y_{k+1}-y_k| \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N}^*)$$

luego, del criterio de comparación y de la convergencia absoluta de $\sum_{k=1}^{\infty}(y_{k+1}-y_k)$ resulta la convergencia absoluta de $\sum_{k=1}^{\infty}X_k(y_{k+1}-y_k)$, por tanto, de la fórmula de sumación parcial de Abel deducimos la convergencia de la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n.y_n$ es convergente.

□

Proposición 8 (Criterio de Dedekind).

Si $\sum_{n=1}^{\infty}x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty}y_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ verifican:

a) la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada.

b) la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a cero.

c) la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-y_{k+1})$ es absolutamente convergente, entonces la serie $(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)*(\sum_{n=1}^{\infty}y_n)$ (es decir $\sum_{n=1}^{\infty}x_n.y_n$) es convergente.

Demostración:

Teniendo presente que $\lim_{n\to\infty} y_n=0$ y que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ está acotada, deducimos $\lim_{n\to\infty} X_n y_{n+1}=0$; la demostración concluye mediante un razonamiento similar al de la proposición anterior.

□

Una variante interesante de este criterio puede encontrarse en el problema 45 del presente capítulo.

Teorema de Maertens.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ una serie absolutamente convergente tal que $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=X \in \mathbb{R}$. Sea $\sum_{n=1}^{\infty}y_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ una serie convergente de suma Y. En tal situación, la serie producto de Cauchy $(\sum_{n=1}^{\infty}x_n).(\sum_{n=1}^{\infty}y_n)$ es convergente

y su suma es X.Y.

Demostración:

Sea $A=\{(n,k):(n,k)\in \mathbb{N}^*x\mathbb{N}^* \wedge n\geqslant k\}$ y consideremos la aplicación $f\in\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ definida por

$$f(n,k)= x_{n-k+1} \qquad (\forall (n,k)\in A)$$

, que podemos "representar" mediante el esquema

x_1

$x_2 \quad x_1$

$x_3 \quad x_2 \quad x_1$

- - - - - -

$x_n \quad x_{n-1} \quad x_{n-2}$ - - - - - - x_1

- - - - - - - - - - - - - - - -

Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente, resulta que f verifica las hipótesis del teorema de Toeplitz.

Más aún, la sucesión cuyos elementos son las sumas de las filas del esquema es, precisamente, la sucesión de sumas parciales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, que converge a X. Por tanto, teniendo presente que $\lim_{n\to\infty} Y_n=Y$ concluimos del teorema de Toeplitz que la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} x_{n-k+1}\cdot Y_k\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a X.Y. Conclusión: La serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$ es convergente y su suma es X.Y.

□

Proposición 9

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ son series absolutamente convergentes, entonces $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$ es absolutamente convergente.

Demostración:

Notemos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a la serie $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n).(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$; sean $X^* = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, $Y^* = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ e $\{Y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de $\{|y_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica

$$|z_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k . y_{n-k+1} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| . |y_{n-k+1}| \qquad (1)$$

, si notamos $t_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| . |y_{n-k+1}|$ resultará

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k| . Y^*_{n-k+1} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

que se obtiene mediante un proceso análogo al de obtención de las sumas parciales de la serie producto ordinario. Por tanto

$$\sum_{k=1}^{n} t_k \leq Y^* . \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq X^* . Y^* \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

de donde resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ es absolutamente convergente. Finalmente, de la relación (1) y del criterio de comparación concluimos la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

□

P R O B L E M A S

1.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales y consideremos

$$b_n = a_n - a_{n+1} \quad y \quad c_n = a_n + a_{n+1} \qquad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*).$$

a) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces las sucesiones $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ son convergentes. Mediante sendos contraejemplos, probar que las sucesiones $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ pueden ser convergentes sin serlo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (respectivamente, absolutamente convergente) sí y sólo sí las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ son convergentes (respectivamente, absolutamente convergentes).

2.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales y consideremos

$$c_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) \quad y \quad d_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \qquad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*).$$

a) Demostrar que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes entonces lo son, asímismo, las sucesiones $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ¿cuales son los respectivos límites?

b) Obtener condiciones necesarias para la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

c) Obtener condiciones suficientes para la convergencia absoluta de las series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

3.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales y consideremos

$$b_n = a_{2n} + a_{2n+1} \qquad (\forall\, n\in\mathbb{N}^*).$$

a) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (respectivamente, absolutamente convergente) entonces lo es, asímismo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Mediante un contraejemplo,probar que el recíproco es falso.

b) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente entonces lo es, asímismo, la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales y notemos por $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{A_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ las sucesiones de sumas parciales de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, respectivamente.

a) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^*$ es convergente entonces lo es, asímismo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Mediante un contraejemplo, probar que el recíproco es falso.

b) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^*$ puede ser divergente sin serlo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Indicación: b) Considérese la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$.

5.- Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales y consideremos

$$c_n = (a_n + a_{n+1}) - (b_n + b_{n+1}) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

a) Demostrar que si dos de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ son convergentes, entonces también lo es la otra serie.

b) Demostrar que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes entonces lo es, asímismo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Mediante un contraejemplo, probar que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ pueden ser absolutamente convergentes sin serlo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

6.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión decreciente de números reales y convergente a cero, tal que la sucesión $\{A_n - n.a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Indicación: Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, considérese $p \in \mathbb{N}^*$ verificando $(p > n) \wedge (a_p \leq \frac{1}{2}a_n)$. Si K es una cota superior de la sucesión $\{A_n - n.a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ probar que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ resulta $\frac{1}{2}na_n < K$.

7.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales tal que la sucesión $\{n.a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n.(a_n - a_{n+1})$ son convergentes. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Indicación: Téngase presente que la sucesión $\{n\ a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente sí y sólo sí lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} [\, n\ a_n - (n+1)a_{n+1} \,]$.

8.- Estudiar, según los distintos valores de a y b, el carácter de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n - b^n}$ $\quad (0 < b < a)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})$ $\quad (0 < b < a)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n . 2^n}{b^n + 2^n}$ $\quad (0 < a \quad y \quad 0 < b)$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - a)^n$ $\quad (a \leq 1)$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a - n^b}$ $\quad (0 < b < a)$

9.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes de números reales positivos. Estudiar el carácter de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . b_n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n . b_n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} . \sqrt{a_n}$ $\quad (\alpha > \frac{1}{2})$

Indicación: b) Téngase presente que $\sqrt{a_n . b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$

f) Téngase presente que si $\alpha > \frac{1}{2}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ es convergente.

10.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales positivos, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . a_{n+1}$ es convergente. Probar que, en general, el recíproco es falso, siendo verdadero en el caso en que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sea monótona.

11.- Demostrar que si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces lo son, asímismo, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

12.- Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales positivos, demostrar que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ poseen el mismo carácter.

13.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de números reales absolutamente convergente y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión acotada de números reales, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . b_n$ es absolutamente convergente. ¿Puede asegurarse algo en el caso en que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea condicionalmente convergente?.

14.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales, demostrar que lo es, asímismo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ y que, en cambio, no tiene porqué serlo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

15.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes de números reales positivos, de manera que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sea una sucesión monótona. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n . a_n . b_n$ es convergente y que, en cambio, no tiene porqué serlo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n$.

Indicación: Pruébese que $\{n . a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión acotada.

16.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente de números reales,

demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot A_n$ es absolutamente convergente.

17.- Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales positivos y, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, consideramos

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \ ,$$

demostrar que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ poseen el mismo carácter.

Indicación: Téngase presente que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geqslant 2)$, se verifica

$$\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=2}^{2n} a_k \ .$$

18.- Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales estrictamente positivos, tales que existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ verificando

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}) .$$

a) Demostrar la relación

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_o \Rightarrow a_n \leqslant \frac{a_{n_o}}{b_{n_o}} \cdot b_n) .$$

b) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces lo es, asímismo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces lo es, asímismo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

d) Demostrar que si existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$(\forall n)\ (n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}),$$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

e) Demostrar que si existen $n_2 \in \mathbb{N}^*$ y $n_3 \in \mathbb{N}^* - \{0,1\}$ tales que

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geqslant n_2 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{n_3}{n}),$$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

19.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión monótona de números reales positivos tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

a) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.a_n$ es convergente.

b) Demostrar que, para cada $k\in\mathbb{N}^*$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.a_{n+k}$ es convergente (notemos su suma por b_k).

c) Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k.b_k$ es convergente.

Indicación: a) Aplicar el teorema de Leibniz.

b) Probar que $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión decreciente, convergente a cero y aplicar el teorema de Leibniz.

20.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de números reales estrictamente positivos y para cada $n\in\mathbb{N}$ notemos por T_n a la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{T_{n-1}^{\alpha}}$ es convergente si $\alpha<1$ y divergente si $\alpha\geqslant 1$.

Indicación: Si $\alpha<1$ considérese $p\in\mathbb{N}^*$ tal que $\alpha<1-\frac{1}{p}$ y, teniendo presente que $1-x^p\leqslant p.(1-x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, pruébese que para cada $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica

$$\frac{T_{n-1}-T_n}{T_{n-1}}\cdot T_{n-1}^{\frac{1}{p}}\leqslant p.\,(T_{n-1}^{\frac{1}{p}}-T_n^{\frac{1}{p}}).$$

21.- Consideremos los conjuntos

$$S_C(\mathbb{R})=\left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}:\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})\ \text{y}\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\ \text{es convergente}\right\}$$

$$S_1(\mathbb{R})=\left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}:\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})\ \text{y}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \text{es absolutamente convergente}\right\}$$

$$S^1(\mathbb{R})=\left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}:\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})\ \text{y}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \text{es convergente}\right\}$$

$$S^2(\mathbb{R})=\left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}:\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})\ \text{y}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\ \text{es convergente}\right\}$$

$$S^4(\mathbb{R})=\left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}:\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in S(\mathbb{R})\ \text{y}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^4\ \text{es convergente}\right\}$$

a) Demostrar que $S_1(\mathbb{R})$ y $S^2(\mathbb{R})$ son ideales del anillo unitario y conmutativo $(S_c(\mathbb{R}),\ +\ ,.)$.

b) Demostrar que $S^1(\mathbb{R})$ no es un subanillo de $(S_c(\mathbb{R}),+,.)$.

c) Demostrar que $S^4(\mathbb{R})$ es un ideal del anillo no unitario y conmutativo $(S^2(\mathbb{R}),+,.)$.

22.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie divergente de números reales estrictamente positivos, demostrar la equivalencia de las proposiciones:

a) Existe una serie parcial convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Existe una serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de números reales positivos, tal que si notamos

$$c_n = \text{ínf } \{a_n,\ b_n\}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente.

c) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Indicación: a) $\Rightarrow$ b) Considérese la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definida por

$$b_{n_k}=1 \ (\forall\, k \in \mathbb{N}^*) \quad \text{y} \quad b_p=\frac{1}{p^2} \ \text{ si } p \neq n_k \ \ (\forall\, k \in \mathbb{N}^*)$$

Probar posteriormente que b) $\Rightarrow$ a) y a) $\Leftrightarrow$ c).

23.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie divergente de números reales positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie convergente de números reales negativos y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es una serie de números reales tal que las anteriores son las correspondientes series de términos positivos y de términos negativos asociadas ¿puede ser condicionalmente convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$? ¿y absolutamente convergente?.

24.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales distintos de cero tal que la sucesión $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente a un número real a de valor absoluto estrictamente menor que 1.

a) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a cero.

b) Si $p \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}(x > 1)$, consideremos

$$a_n = \frac{n^p}{x^n} \quad y \quad b_n = \frac{x^n}{n!} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Estudiar el carácter de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

25.- Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente .

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ es absolutamente convergente.

Demostrar que se verifica la relación

$$(\forall p)(p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n . b_n^p \text{ es convergente}).$$

Indicación: Aplicar, reiteradamente, el criterio de Du Bois-Raymond.

26.- Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que

i) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión acotada.

ii) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente a cero.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ es absolutamente convergente.

Demostrar que se verifica la relación

$$(\forall p)(p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n . b_n^p \text{ es convergente}).$$

Indicación: Aplicar, reiteradamente, el criterio de Dedekind.

27.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales tal que existe $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ para el cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda} . a_n$ es convergente. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Indicación: Aplíquese el criterio de Abel a las sucesiones

$$\left\{\frac{1}{n^{\lambda}}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ y } \{n^{\lambda}.a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

28.- Demostrar la existencia de tres sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ verificando, simultáneamente, las condiciones siguientes:

a) $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \in Q \wedge b_n \in \mathbb{R}-Q \wedge c_n \in \mathbb{R}-Q)$.

b) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ son estrictamente crecientes.

c) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es estrictamente decreciente.

d) $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$.

e) $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es no convergente.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{c_n}$ es absolutamente convergente.

29.- Demostrar la existencia de una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de números reales que verifique, simultáneamente, las condiciones siguientes:

a) $(\forall k)(k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_{2k} \in Q)$.

b) $(\forall k)(k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_{2k-1} \in \mathbb{R}-Q)$.

c) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es estrictamente decreciente.

d) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

30.- Para cada número real a, demostrar la existencia de dos sucesiones de números irracionales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ verificando, simultáneamente, las condiciones siguientes:

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente.

b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente decreciente.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ es convergente.

31.- Consideremos el conjunto

$$A=\left\{ n:(n\in\mathbb{N}^*)\wedge(\text{en la expresión decimal de n no aparece la cifra 0})\right\}$$

a) Demostrar que A es un conjunto infinito y numerable.

b) Si f es una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}^*$ en A, y notamos $f(k)=n_k \quad (\forall\, k\in\mathbb{N}^*)$, demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}$ es convergente y, además, su suma es menor que 90.

Indicación: b) Obtener previamente, cuántos números de p cifras las posee todas distintas de cero y, a partir de aquí, obtener una serie convergente mayorante de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}$.

32.- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión divergente de números reales estrictamente positivos, definimos el exponente de convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, que notaremos exp. conv. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, al número real

$$\text{ínf}\left\{\alpha:\alpha\in\mathbb{R}\wedge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha}} \text{ es convergente}\right\}$$

, en el caso en que $\left\{\alpha:\alpha\in\mathbb{R}\wedge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha}} \text{ es convergente}\right\}\neq\emptyset$
En caso contrario, es decir si para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha}}$ es divergente, entonces diremos que el exponente de convergencia de la sucesión es $+\infty$.

a) Demostrar que el exponente de convergencia de una sucesión divergente de números reales estrictamente positivos es o bien $+\infty$ o bien un número real positivo.

b) Obtener los exponentes de convergencia de las sucesiones de términos generales:

i) $a_n=n$ ii) $b_n=n^2$

iii) $c_n=2^n$ iv) $d_n=n!$

33.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dos sucesiones de números reales verificando las condiciones:

i) $(\forall\, n)\quad (n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow b_n>0)$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

iii) $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente.

Demostrar que la sucesión $\left\{\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y, además, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} .$$

Indicación: Aplíquese el teorema de Toeplitz al esquema

$$\frac{b_1}{B_1}$$

$$\frac{b_1}{B_2} \quad \frac{b_2}{B_2}$$

. . . . . .

$$\frac{b_1}{B_n} \quad \frac{b_2}{B_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{b_n}{B_n}$$

. . . . . .

34.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos.

a) Si notamos $c_n = \dfrac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{b_1+\ldots+b_n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y, además, suponemos que

i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

demostrar que la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y verifica $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Si notamos $d_n = \dfrac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{b_n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ y, además, suponemos que

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es estrictamente creciente y no acotada.

demostrar que la sucesión $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente a cero.

Indicación: a) Aplíquese el toerema de Toeplitz al mismo esquema del problema anterior.

b) Aplicar el apartado anterior a la sucesión $\{A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (considerando $A_o=0$) y a la sucesión $\{b_n-b_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (considerando $b_o=0$).

35.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales estrictamente positivos tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{B_n} = 0$$

y, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, consideremos

$$c_n = a_1b_n+\ldots+a_nb_1$$

(es decir, c_n es el término n-ésimo de la serie producto de Cauchy de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

Demostrar que la sucesión $\left\{ \frac{c_n}{C_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge a cero.

Indicación: Aplíquese el teorema de Toeplitz al esquema

$$\frac{a_1B_1}{a_1B_1}$$

$$\frac{a_2B_1}{a_1B_2+a_2B_1} \qquad \frac{a_1B_2}{a_1B_2+a_2B_1}$$

. . . . . .

$$\frac{a_nB_1}{a_1B_n+\ldots+a_nB_1} \qquad \frac{a_{n-1}B_2}{a_1B_n+\ldots+a_nB_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{a_1B_n}{a_1B_n+\ldots+a_nB_1}$$

. . . . . .

36.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de números reales estríctamente positivos tales que $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$. Demostrar que si $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión de números reales convergente a $b \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $\left\{ \frac{a_1b_n+\ldots+a_nb_1}{a_1+\ldots+a_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, asímismo, a b.

Indicación: Aplíquese el teorema de Toeplitz al esquema

$$\frac{a_1}{A_1}$$

$$\frac{a_2}{A_2} \quad \frac{a_1}{A_2}$$

. . . . .

$$\frac{a_n}{A_n} \quad \frac{a_{n-1}}{A_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{a_1}{A_n}$$

. . . . . .

37.- Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$, notaremos $\sum_{x\in A} x$ al supremo en $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ del conjunto

$$\left\{ y:(\exists\, B)\ (B\in P_F(A)\wedge\ y=\sum_{z\in B} z) \right\}$$

, donde $\sum_{z\in B} z$ representa la suma de los elementos del conjunto finito B.

a) Demostrar que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$ tal que $\sum_{x\in A} x \in \mathbb{R}$ entonces A es numerable. ¿Es cierto el recíproco?.

b) Demostrar que si A es un subconjunto infinito y numerable de $\mathbb{R}^+$ ($A= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{a_n\}$), entonces el número real $\sum_{x\in A} x$ coincide con la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Indicación: a) Si $\alpha = \sum_{x\in A} x \in \mathbb{R}$ considérese, para cada $n\in\mathbb{N}^*$, un conjunto $B_n \in P_F(A)$ tal que

$$\sum_{z\in B_n} z \quad \geq \alpha - \frac{1}{n} \quad .$$

38.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series convergentes de números reales positivos y consideremos para cada $k\in\mathbb{N}^*$

$$c_{2k}=\left(\frac{1+a_{2k}}{2+b_{2k}}\right)^{2k} \quad y \quad c_{2k-1}=\left(\frac{3+b_{2k-1}}{4+a_{2k-1}}\right)^{2k-1}$$

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente.

Indicación: Aplíquese el criterio de la raiz.

39.- Sean α y β números reales tales que $\alpha\in]0,1[$, $\beta\in]0,1[$ y consideremos para cada $k\in\mathbb{N}^*: a_{2k}=\alpha^{2k} \wedge a_{2k-1}=\beta^{2k-1}$. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Indicación: Aplíquese el criterio de la raiz.

40.- Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ la serie deducida de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ al prescindir de los términos de ésta tales que en la representación decimal del denominador aparece la cifra 9. Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente y su suma es menor que 80.

Indicación: Obsérvese que existen $9^n - 9^{n-1}$ términos de la serie tal que el denominador posee n cifras y, además, cada uno de tales términos son menores o iguales que $\frac{1}{10^{n-1}}$.

41.- ¿Puede existir una serie de números reales tal que toda serie parcial distinta de ella misma sea condicionalmente convergente?.

42.- Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ consideremos la serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ de suma A_n y supongamos que la serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ de suma B verifica para cada $k \in \mathbb{N}^*$ la relación $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |a_{nk}| \leq b_k)$. Supongamos, además, que para cada $k \in \mathbb{N}^*$ la sucesión $\{a_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente de límite c_k. Se pide:

a) Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ es convergente (notemos su suma por C).

b) Demostrar que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es convergente y su límite es C.

Indicación: Obsérvese que para cada $k \in \mathbb{N}^*$ se verifica $|c_k| \leq b_k$.

43.- a) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ una serie absolutamente convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ una serie condicionalmente convergente. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por las relaciones

$$a_{2n-1} = b_n \quad \text{y} \quad a_{2n} = c_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$$

es condicionalmente convergente.

b) Aplicando el apartado anterior, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por las relaciones

$$a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+1} + n^{\alpha}} \quad (\alpha > 1) \quad \text{y} \quad a_{2n} = (-1)^n \cdot [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}] \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

es condicionalmente convergente.

44.- (Generalización del criterio de condensación de Cauchy)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R})$ tal que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es decreciente.

Sea $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \in S(\mathbb{N}^*)$ una sucesión estrictamente creciente tal que existe $M \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ verificando $p_{k+1} - p_k \leq M.(p_k - p_{k-1})$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ (tomando $p_o = 0$).

Demostrar que las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{k=1}^{\infty} (p_{k+1} - p_k).x_{p_k}$ poseen el mismo carácter.

Indicación: Si notamos $y_k = (p_{k+1} - p_k).x_{p_k}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ pruébese

i) $n < p_k \Rightarrow X_n \leq X_{p_1 - 1} + Y_k$

ii) $n > p_k \Rightarrow M.X_n \geq Y_k - Y_1$.

45.- (Variante del criterio de Dedekind)

Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sucesiones de números reales tales que

i) $\lim_{n \to \infty} y_n.\sqrt{n} = 0$.

ii) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k+1}).\sqrt{k}$ es absolutamente convergente.

iii) la sucesión $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot X_n\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ está acotada.

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n.y_n$ es convergente.

A P E N D I C E

AXIOMATICA VON NEUMANN - BERNAYS - GODEL

Axioma I (de clasificación)

Un objeto matemático a pertenece a la clase $\{x:F(x)\}$ sí y sólo sí la proposición F(a) es verdadera y, además, a es un conjunto.

Axioma II (de extensión)

Dos clases a y b son iguales sí y sólo sí $(a \subset b) \wedge (b \subset a)$.

Axioma III (del conjunto de partes)

Si a es un conjunto, entonces existe un conjunto, que notaremos P(a) y denominaremos conjunto de partes de a, que verifica la siguiente condición: una clase x es subclase de a sí y sólo sí $x \in P(a)$.

Axioma IV (de la unión)

Si las clases a y b son conjuntos entonces la clase $a \cup b$ es un conjunto.

Axioma V (de regularidad)

Si a es una clase no vacía, entonces existe un elemento x de la clase a tal que $a \cap x = \emptyset$.

Axioma VI (de la elección)

Para cada conjunto A existe, al menos, una aplicación φ de $P(A)-\{\emptyset\}$ en A tal que para cada $B \in P(A)-\{\emptyset\}$ se verifica $\varphi(B) \in B$.

Axioma VII (de amalgamación)

Si A es un conjunto entonces la clase UA es un conjunto.

Axioma VIII (de sustitución)

Si G es una gráfica funcional entre dos clases y dom G es un conjunto, entonces rec G es un conjunto.

Axioma IX (del infinito)

Existe un conjunto A_o que verifica

$$(0 \in A_o \wedge (\forall x)\ (x \in A_o \Rightarrow x^+ \in A_o))$$

A X I O M A T I C A ZERMELO - FRAENKEL

Axioma I (de extensión)

Si A y B son conjuntos tales que $(\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$, entonces $A=B$.

Axioma II (del conjunto vacío)

Existe un conjunto, que denominaremos conjunto vacío (cuya unicidad resulta del axioma anterior) tal que carece de elementos; es decir $(\exists A)(\forall x)\ (x \notin A)$. Dicho conjunto se nota por el símbolo $\emptyset$.

Axioma III (de la unión)

Si A es un conjunto entonces existe un conjunto B verificando la

siguiente condición: x es elemento de B sí y sólo sí existe $y \in A$ tal que $x \in y$; es decir

$$(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x) \quad (x \in B \Leftrightarrow (\exists y)\ (y \in A \wedge x \in y)).$$

Axioma IV (del conjunto de partes)

Para cada conjunto A existe un conjunto, que notaremos P(A) y denominaremos conjunto de partes de A, verificando la siguiente condición: x es un elemento de P(A) sí y sólo sí es un subconjunto de A.

Axioma V (de regularidad)

Si A es un conjunto no vacío, entonces existe un elemento x del conjunto A tal que $A \cap x = \emptyset$.

Axioma VI (de la elección)

Para cada conjunto A existe, al menos, una aplicación φ de $P(A) - \{\emptyset\}$ en A tal que para cada $B \in P(A) - \{\emptyset\}$ se verifica $\varphi(B) \in B$.

Axioma VII (de reemplazamiento para una función proposicional)

Si F(x,y) es una función proposicional tal que para cada x existe un único y verificando F(x,y), entonces para cada conjunto A existe un conjunto B tal que x pertenece a B sí y sólo sí existe $y \in A$ verificando F(y,x) ; es decir

$$[(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F(x,y) \wedge F(x,z) \Rightarrow y=z)] \Rightarrow [(\forall A)(\exists B)(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow (\exists y)(y \in A \wedge F(y,x)))] .$$

Axioma VIII (del infinito)

Existe un conjunto A que verifica

$$(\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)) .$$

Observación al axioma VIII: Si A y B son conjuntos, entonces existe un conjunto C tal que sus únicos elementos son A y B (aplíquese el axioma VII a la función proposicional $(x=\emptyset \wedge y=A) \vee (x\neq\emptyset \wedge y=B)$). La unicidad del tal conjunto C, que notaremos $\{A,B\}$, resulta del axioma I. Si A=B notaremos $\{A\} = \{A,A\}$.

B I B L I O G R A F I A

1.- APOSTOL T.M.: "Análisis Matemático". Ed. Reverté. Barcelona (1976).

2.- ARTIN, E.: "Algebre Geometrique". Gauthier-Villars. París (1962).

3.- BARNES D.W. y MACK J.M.: "Una introducción algebraica a la Lógica Matemática". Eunibar. Barcelona (1978).

4.- BERNAYS, P.: "Axiomatic set theory".North-Holland. Amsterdan (1968).

5.- BLYTH T.S.: "Set theory and abstract algebra". Longman Mathematical Texts. Londres (1975).

6.- BOURBAKI N.: "Elements de Mathematique"-"Theorie des ensembles". Hermann. París (1970).

7.- BOURBAKI N.: "Elements de Mathematique" - "Algebre". Livre II. Chapitre 6. Hermann. París (1964).

8.- COUTY R. y EZRA J.: "Analyse M.P. Premiere annee et speciales A-A'". Tome I. Collection U. Armand Colín. París (1967).

9.- DONEDDU A.: "Complements d'analyse". Tome IV. Dunod.París (1968).

10.- DUBREIL P.: "Algebre". Tome I. Cahiers scientifiques. Fascículo XX. Gauthier-Villars. París (1963).

11.- ENDERTON H.B.- "Elements of set theory". Academic Press. New York (1977).

12.- GAUGHAN E.: "Introducción al análisis". Ed. Alhambra. Madrid (1972).

13.- GODEMENT R.: "Cours d'algebre".Hermann .París (1966).

14.- HALMOS P.R.:"Naive set theory". Springer-Verlag. New York (1970).

15.-HILBERT D.y ACKERMANN: "Elementos de lógica teórica".Ed. Tecnos. Madrid (1975).

16.- JECH T.J.: "Set theory". Academic Press. New York (1978).

17.- KELLEY J.L.: "General Topology". Van Nostrand. New York (1963).

18.- KLEENE S.C.: "Introducción a la metamatemática". Ed. Tecnos. Madrid (1974)

19.- KNOPP K.: "Theory and application of infinite series". Hafner Publishing Company. New York (1971).

20.- KURATOWSKI K. y MOSTOWSKI a.: "Set Theory". Studies in logic and the foundations of Mathematics. North-Holland. Amsterdam (1968).

21.- LANG S.: "Analysis I".Addison-Wesley (1971).

22.- LANG S.: "Algebra". Ed. Aguilar (1971).

23.- LEVY A.: "Basic set theory". Springer-Verlag (1979).

24.- MULLER G.H.: "Sets and classes". Studies in logic and the foundations of Mathematics. North-Holland. Amsterdam (1968).

25.- MOSTERIN J.: "Teoría axiomática de conjuntos". Ediciones Ariel. Barcelona (1971).

26.- RUDIN W.: "Principios de Análisis Matemático". Ediciones del Castillo. Madrid (1966).

27.- SIERPINSKI W.: "Leçons sur les nombres transfinis". Gauthier-Villars. París (1928).

28.- SIGLER L.E.: "Exercices in set theory". Springer-Verlag. New York (1976).

29.- TAKEUTI G. y ZARING W.M.: "Introduction to axiomatic set theory". Springer-Verlag. New York (1971).

30.- WHITE A.J.:"Introducción al Análisis Real". Ediciones de Promoción Cultural. Barcelona (1973).

31.- DEVLIN K.J.: "Fundamentals of Contemporary Set Theory". Springer-Verlag. New York (1979).

INDICE DE NOTACIONES

$a = b$	2	$\lvert a,b \rvert$	27	$x \, R \, y$	89
$a \in b$	3	(a,b)	30	$\bar{a}$	90
$a \neq b$	3	(a,b,c)	32	A/R	91
$a \notin b$	3	$a \times b$	32	Π_R	93
$\neg p$	3	$\mathrm{dom}\, G$	34	R_f	93
$p \vee q$	3	$\mathrm{rec}\, G$	34	i_B	94
$p \wedge q$	3	$G\lvert_C$	35	$\leqslant$	102
$p \Rightarrow q$	4			$\geqslant$	102
$p \Leftrightarrow q$	5	Δ_a	36	$<$	102
$p \equiv q$	6			$>$	102
$\forall$	11	$G' \circ G$	36	$\sup B$	105
$\exists$	11	G^{-1}	37	$\inf B$	106
N-B-G	18	I_A	41	$\max B$	106
Z - F	18	$\mathbf{C}(A)$	41	$\min B$	106
$\lvert x:F(x) \rvert$	19	$\mathbf{C}^{-1}(B)$	41	$[a,b]$	113
$a \subset b$	20	$\mathbf{C}'_o\mathbf{C}$	42	$]a,b[$	114
$b \supset a$	20	$\mathbf{C}^{-1}$	43	$]a,b]$	114
$a \subsetneqq b$	21	$f(x)$	45	$[a,b[$	114
$b \supsetneqq a$	21	$\mathcal{F}(A;B)$	45	$[a,\rightarrow[$	114
$\cup$	21	$\varnothing_A$	45	$]a,\rightarrow[$	114
$\varnothing$	21	$f\lvert_A$	46	$]\leftarrow,a]$	114
$a \cup b$	22			$]\leftarrow,a[$	114
$a \cap b$	22	$\{A_i\}_{i \in I}$	63	$]\leftarrow,\rightarrow[$	114
$a - b$	22	$\bigcap_{i \in I} A_i$	65	x^+	133
$\binom{a}{b}$	22			$S(x)$	135
$\bigcap_a$	22	$\bigcup_{i \in I} A_i$	65	A^+	179
$\bigcup_a$	22			$\mathbb{N}$	180
$P(a)$	24	$\prod_{i \in I} A_i$	80	$\bar{n}$	183
$\lvert a \rvert$	26	Π_j	81	$m+n$	191
				$m.n$	192
				$q-p$	197
				$n!$	207

$n(A)$ 218
$P_F(A)$ 226
p^n 232
Σ 246
θ 266
ω 273
0_A 281
Card A 281
Ω 284
χ 291
χ_α 291
x^{-1} 304
Kerf 308
Z 321-325
Z^+ 330
Z^- 330
$+x$ 330
$-x$ 330
Q 335-343-344
$\frac{x_1}{x_2}$ 344
Z [x] 347
P+P 350
$-P$ 349
G^+ 351
G^- 351
$|x|$ 358
K_1 364
K_2 364
K_3 364
$\mathbb{N}^*$ 367
$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ 367
S(K) 367
$\lim_{n\to\infty} x_n$ 371
$C^*(K)$ 371
C(K) 372
$\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ 377
N(K) 383
$\tilde{K}$ 383
$\tilde{K}^+$ 391
$\tilde{K}^-$ 391
$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow[K]{} x$ 394
$\lim_{n \xrightarrow[K]{} \infty} x_n$ 394-445
$\overline{\mathbb{R}}$ 404
$\sqrt[n]{x}$ 425
$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ 433-445-446
$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ 434-445-446
$+\infty$ 443
$-\infty$ 443
$\overline{\mathbb{R}}$ 444
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 475
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 475
$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right)$ 476
$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) * \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right)$ 477
$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \perp \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right)$ 477
$\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ 487
$R_{n,k}$ 488
$\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ 499
$\mathcal{S}^-(\mathbb{R})$ 499
$\exp_a$ 512
a^x 512
$\lg_a$ 513
x^k 513
x_n^+ 531
x_n^- 531

I N D I C E D E A U T O R E S

ABEL N.H. 545-546-548-559

ARQUIMEDES 202-203-232

BERNAYS P. VII-1-18-208-567

BERNSTEIN F. 254-284

DU BOIS-RAYMOND P. 547-558

BOOLE G. 8

BOREL E. 59

BROUWER L.E.J. 59

BURALI - FORTI C. XI-17-271

CANTOR G. 17-18-19-58-254
259-284-289-290
292

CAUCHY A. 373-374-376-379
380-384-385-386
389-395-396-398
402-405-407-412
413-419-425-469
476-477-483-490
491-507-511-530
548-562-566

COHEN P.J. 59-291

D'ALEMBERT J. 505

DEDEKIND R. XI-226-235-240
241-410-411-414
416-548-558-566

DIRICHLET P.G. 545-547

FRAENKEL A.A. VII-18-568

FREGE G. 280

GALOIS E. 153

GODEL K. VII-1-18-59
208-290-567

GODEMENT R. 1

HADAMARD J. 59

HAUSDORFF F. 162-177-256-292

HILBERT D. X-17-59-208-209
210-212-292

JANIENSZEWSKI 59

KRONECKER L. X-18

KURATOWSKI K. 162-177

LEBESGUE H. 59

LEIBNIZ 526-527-556

LEVI B. 58

LINDENBAUM A. 290

LUSIN N. 59

MAERTENS F.C. 425-548

MORGAN A. 8-24

MULLER G.H. VIII

PASCAL B. 208

PEANO G. X-58-59-208-209
210-212

PRINGSHEIM A. 512-514-515

RAABE J.L. 509

RIEMANN B. IX-538

ROBINSON R.M. 259

RUBIN H. 292

RUSSELL B. 17-19-20-28
30-59-280

SIERPINSKI W. 290

STOLZ O. 425-457-459

TAKEUTI G. XI-274

TARSKI A. 225-226-290

TOEPLITZ O. 425-427-428-429
430-457-458-421
549-561-562-563

TUCKEY J.W. 162-256

VON NEUMANN J. VII-1-18-208-259
567

ZARING W.M. XI-274

ZERMELO E. VII-IX-X-18-58
59-162-163-165
166-171-174-224
281-568

ZORN W. IX-X-59-150-162
163-166-171-173
174-175-177-250
254-256-259-399

I N D I C E A L F A B E T I C O

Absorción 8-24
Acumumulación 461
Aleph 291
Algebra
- de proposiciones 5-8
- de Boole 8
- sobre un cuerpo 320
Antecedente 4
Anillo 310
- cociente 314
- ordenado 351
- trivial 311
Anterior (de un número natural) 184
Aplicación 45
- compatible con una relación de equivalencia 94
- compatible con dos relaciones de equivalencia 95
- deducida por paso al cociente 95
- creciente 122
- estrictamente creciente 122
- decreciente 123
- estrictamente decreciente 123
- monótona 123
- estrictamente monótona 123
- vacía 45

Axioma 2
- de clasificación 20
- de extensión 21
- del conjunto de partes 24
- de la unión 26
- de regularidad ó fundamentación 28
- de la elección 58
- de amalgamación 64
- de sustitución 66
- del infinito 180
- de Zermelo 166
- débil de regularidad 297
Axiomática
- Von Neumann-Bernays-Gödel 18-567
- Zermelo Fraenkel 18-568

Buena ordenación 132

Cadena 163
Carácter finito 255
Característica (de un anillo) 334
Cardinal 281
- finito 286
- infinito o transfinito 286
Clase 19
- vacía 21
- universal 21
- unión o reunión de dos clases 22
- unión o reunión de los elementos de una clase 22
- intersección de dos clases 22
- intersección de los elementos de una clase 22
- diferencia 22
- complementaria 22
- preordenada 102
- parcialmente ordenada 102
-totalmente ordenada 102
- filtrante superiormente 11
- filtrante inferiormente 11
- filtrante 111
- reticulada superiormente 111
- reticulada inferiormente 111
- reticulada 111
- bien ordenada 132
- acotada superiormente 105
- acotada inferiormente 105
- acotada 105
- propia 19
- de equivalencia 90
- transitiva 213-259
Clausura transitiva 297
Cofinal 109
Coinicial 110
Cociente (en una división euclídea) 204-333
Colección 18
Colectivizante 18
Compleja (proposición) 2
Comparables (elementos) 102
Componentes (de un par ordenado) 30
Composición
- de gráficas 36
- de correspondencias 42
Conclusión 10

Condición de Tuckey 256
Conectivos lógicos 3
Conjunción
- de proposiciones 3
- de predicados 11
Conjunto 19
- imagen por una correspondencia 41
- antiimagen por una correspondencia 41
- de índices 63
- cociente 91
- continuo 126
- denso 126
- inductivo 163
- de Zermelo 165
- finito 216
- infinito (según Dedekind) 235
- numerable 243
- de los números naturales 180
- de los números enteros 321
- de los números racionales 344
- de los números reales 404
- abierto 417
- ampliado de $\mathbb{R}$ 444
- de partes 24
- bien ordenado 140
- de Peano-Hilbert 280
Cono positivo 351
Consecuente 4
Constante (predicado) 10
Contradicción 2
Convergencia
- más o menos rápida 518
- absoluta 529
- ordinaria 529
- incondicional o conmutativa 536
Correspondencia
- entre conjuntos 41
- identidad 41
- inversa 43
- inyectiva 44
- epiyectiva o exhaustiva 44
- biyectiva 44
- de Galois 153
Corolario 2
Cortadura 125
Cota
- superior 104
- inferior 105
Criterio
- de Stolz 457
- de comparación 500
- de Pringsheim 514
- de comparación generalizado 501
- del cociente (D'alembert) 505
- de la raiz para sucesiones 442
- de la raiz (Cauchy) para series 507
- de la media geométrica 443
- de Raabe 509
- de condensación (Cauchy) 511
- de Dirichlet 545
- de Abel 546
- de du Bois-Raymond 547
- de Dedekind 548
Cuantificador
- universal 11
- existencia 11
Cuaterna ordenada 32
Cuerpo 316
- de cocientes o fracciones 336
- de los números racionales 344
- de los números reales 404
- ordenado 354
- ordenado arquimediano 360
- ordenado completo 374
- ordenado universalmente arquimediano 409
- ordenado de Dedekind 410

Denso
- conjunto totalmente ordenado 126
- en un conjunto totalmente ordenado 127
Descomposición canónica
- de una aplicación 96
- de un morfismo de grupos 309
- de un morfismo de anillos 316
Diagonal (de una clase) 36
Diferencia (clase) 22
Disjuntas (clases) 22
Distinguido (par ordenado) 329
Distributiva 7-23-304
Disyunción
- de proposiciones 3
- de predicados 11
Divergencia (más o menos rápida) 519
Divergente
- sucesión 445
- serie 485
Dividendo 204-334
División euclídea 203-333

Divisor 204-251-334
- de cero 312
Doblete 26
Dominio
- de una gráfica 34
- de integridad 312
Elemento
- distinguido 58
- de separación 126
- neutro 303
- inverso 303
- invertible 305-311
- finito 363
Entera (parte) 471
Epimorfismo 308
Epiyección canónica 93
Equivalencia lógica
- de proposiciones 5
- de fórmulas 6
Equipotentes (conjuntos) 216
Espacio vectorial 318
Estricta (inclusión) 21
Exponencial (función) 232-512
Exponente de convergencia 560
Existencial (cuantificador) 11
Extensión
- de una aplicación 47
- de un cuerpo 317
- ordenada 354

Factorial (función) 207
Falsa (fórmula idénticamente) 6
Familia
- de conjuntos sobre una clase con clase de índices 63
- de conjuntos con conjunto de índices 63
- de elementos 63
- de partes 64
- de carácter finito 255
Filtrante
- superiormente 111
- inferiormente 111
Finito (conjunto) 216
Forma canónica (de un número entero) 330
Fórmula del álgebra de proposiciones 5
Fórmula de sumación parcial de Abel 545
Formas de indeterminación 457
Función
- proposicional 10
- de elección 58
- de recurrencia 145
- exponencial 232-512
- logarítmica 513
- potencial 513
Funcional (gráfica) 35

Gráfica 34
- inversa 37
- inyectiva 39
- epiyectiva o exhaustiva 39
- biyectiva o biunívoca 40
- restricción 35

Grupo
- conmutativo 305
- cociente 308
- de cocientes 321
- ordenado 349

Hipótesis 10
- generalizada del contínuo 290
- del contínuo 290
- de los "aleph" 292

Homólogo 34

Ideal 313
- principal 313
- maximal 313
- primo 314
Idempotencia 8-24
Idénticamente
- verdadera 5
- falsa 6
Igualdad 2-90
Implicación
- lógica 4
- doble 5
Inclusión 20
- estricta 21
Indeterminación (formas de) 457
Individual (objeto) 10
Inductivo (conjunto) 163
Infimo 105
Infinito (conjunto) 235
Infinitamente
- grande 363
- pequeño 363
Intersección
- de dos clases 22
- de los elementos de una clase 22
- de una familia de conjuntos 65
Interior transitivo 298
Intervalos 113

Inyección canónica 47
Isomorfismo
- de semigrupos 308
- de semianillos 315
- de orden 118
- de anillos ordenados 353
- $\in$-isomorfismo 298

Laguna 126
Lema 2
- de Zorn 165
- de Kuratowski 177

Ley
- de simplificación 202
- de monotonía 201
Leyes de Morgan 8-24
Límite
- de una sucesión 371
- superior en $\mathbb{R}$ 433
- superior en $\bar{\mathbb{R}}$ 445
- inferior en $\mathbb{R}$ 434
- inferior en $\bar{\mathbb{R}}$ 445
Lógicamente equivalentes (proposiciones) 6
Lógico (razonamiento) 9

Maximal 106
Máximo 106
Minimal 106
Mínimo 106
Monomorfismo 308
Morfismo
- de orden 116
- de semigrupo 308
- de semianillo 315

Negación
- de proposiciones 3
- de predicados 11
Núcleo (de un morfismo) 308
Numerable (conjunto) 243
Número
- natural 180
- cardinal 281
- ordinal 271-273
- entero 325
-racional 344
- real 404
- algebraico 416
- real adherente 461
- real de acumulación 461
- de elementos de un conjunto finito 218

Objeto
- matémático 1
- variable 10
- individual 10
Operación
- interna 302
- externa 302
- asociativa 303
- conmutativa 303
Orden
- isomorfismo 118
- isomorfas (clases) 118
Ordenación
- usual de $\mathbb{N}$ 184
- usual de Z 331
- usual de los ordinales 261
- producto 278
- lexicográfica 274
- transportada 124
Ordinal 261
- de primera especie 295
- de segunda especie 295

Par ordenado 30
Paradoja
- de Russell 17-20-30
- de Burali-Forti 17-271
Paréntesis (introducción y supresión) 493
Parte
- cofinal 109
- coinicial 110
- entera 471
Partición 77
Pertenencia 18
Predicado 10
- de varias variables 15
- universal 10
Premisa 10
Preorden 101
Primer elemento 106
Principio
- del tercio excluso 2
- de no contradicción 2
- de maximalidad de Hausdorff 177
Proceso recurrente 144
Producto
- cartesiano 32
- de una familia de conjuntos
- de números naturales 192
- de númeos ordinales 279

- de números enteros 326
- ordinario o de Cauchy 476
- interior 476-477
Prolongación (de una aplicación) 47
Propiedad
- asociativa 6-22-303
- conmutativa 6-23-303
- distributiva 7-23-304
- no colectivizante 18
- de Arquímedes 202-332
- del supremo 410
Proposición 1
Proyección en un producto de conjuntos de una familia 81

Raiz n-ésima 425
Razonamiento
- lógico 9
- lógico válido 10
Recorrido (de una gráfica) 34
Recubrimiento
- de un conjunto 74
- más o menos fino 76
Relación binaria 34
- reflexiva 89
- simétrica 89
- transitiva 89
- antisimétrica 89
- conexa 89
- de equivalencia 89
- de orden parcial 101
- de orden total 101
Relación de equivalencia 89
- asociada a una aplicación 94
- cociente 98
- producto 100
- compatible con una operación interna 321
Regular (elemento) 196-304
Representante (de una clase de equivalencia) 90
Resto
- en una división euclídea 204-333
- de una serie 488
Restricción (de una aplicación) 47
Retículo superior o inferior 111
Retracción (de una aplicación) 53
Reunión
- de dos clases 22
- de los elementos de una clase 22
- de una familia de conjuntos 65

Salto 126
Sección (de una aplicación) 53
Segmento
- de una clase parcialmente ordenada 115
- de extremo x 135
Semianillo 310
Semigrupo 304
Serie
- de números reales 475
- suma 476
- convergente 485
- divergente 485
- oscilante 486
- resto 488
- geométrica 486
- armónica 491
- armónica generalizada 513
- de términos positivos 499-531
- de términos negativos 499-531
- alternada 524
-mayorante 499
- minorante 499
- absolutamente convergente 529
- condicionalmente convergente 529
- incondicional o conmutativamente convergente 536
- parcial 534
- reordenada 536
- telescópica 491
Siguiente
- en una ordenación 108
- de una clase 179
Simple (proposición) 2
Simplete 26-27
Sistema
- de conjuntos 64
- asociado a una familia 64
Subálgebra 320
Subanillo 312
Subclase 20
Subconjunto 25
Subcuerpo 317
- primo 317-335
Subdominio de integridad 312
Subespacio vectorial 319
Subgrupo 306
- normal o invariante 307
Sucesión
- de elementos de un conjunto 367
- cuasi-constante 368
- creciente 368
- estrictamente creciente 368
- decreciente 368
- estrictamente decreciente 368
- monótona 368
- estrictamente monótona 368

- acotada superiormente 368
- acotada inferiormente 368
- acotada 369
- convergente 371
- fundamental o de Cauchy 371
- parcial 377
- estrictamente positiva 389
- estrictamente negativa 389
- convergente a $+\infty$ 445
- convergente a $-\infty$ 445
- divergente 445

Suma
- de números naturales 191
- de números ordinales 275
- de números enteros 325
- parcial 475
- de una serie 485

Suprayectiva (gráfica) 39
Supremo 105

Tabla de verdad 2
Tautología 5
Teorema 2
- de $\in$-inducción transfinita 88
- de inducción transfinita 135
- de definición de una aplicación por recurrencia transfinita 146
- de recurrencia transfinita para clases bien ordenadas 159
- de recurrencia transfinita en $\mathbb{N}$ 189
- de inducción completa 181
- del extremo 187
- de Zermelo 224
- de Tarski 225
- de Dedekind 226
- de Cantor-Bernstein 254-284
- de Cantor 289
- de recurrencia transfinita para ordinales 299
- de caracterización de subgrupos 306
- de caracterización de subanillos 312
- de caracterización de subespacios vectoriales 319
- de caracterización de subálgebras 320
- de completitud 395
- de los intervalos encajados 420
- de existencia de la raiz n-ésima 423
- de Toeplitz 425
- de la media 429
- de Maertens 548
- de Leibniz 526
- de reordenación de Riemann 538
- de Dirichlet 545

Terna ordenada 32
Tesis 10
Torre o t-sistema 168

Ultimo elemento 106
Unión
- de dos clases 22
- de los elementos de una clase 22

Universal
- Predicado 10
- Cuantificador 11
- Clase 21

Vacía (clase) 21
Valor de adherencia 378-430
Valoración en un cuerpo ordenado 358
Valor absoluto 358
Variable (objeto) 10
Verdadera (fórmula idénticamente) 5